Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Zeigen Sie, dass 2SAT, also die Einschränkung des Satisfiability-Problems auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens zwei Literale hat, in polynomieller Zeit lösbar ist. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie Varianten von Satisfiability eingeschränkt auf Instanzen, in denen jede Variable in höchstens drei Klauseln vorkommt und jede Klausel
   (a) genau drei Literale enthält.
   (b) höchstens drei Literale enthält.

   Man entscheide für beide Varianten, ob sie *NP*-vollständig sind oder ob es einen polynomiellen Algorithmus gibt. Begründen Sie Ihre Antworten. (3+3 Punkte)

3. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge X sei wie folgt definiert: „true" und „false" sind boolesche Formeln der Länge 0. „x" und „$\bar{x}$" (für $x \in X$) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind ϕ und ϕ' boolesche Formeln der Längen k bzw. k', dann sind „$(\phi \wedge \phi')$" und „$(\phi \vee \phi')$" boolesche Formeln der Länge $k + k'$. Weitere boolesche Formeln gibt es nicht.
   Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn $P = NP$ gilt. (5 Punkte)

4. Das Clique-Problem (also das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph G eine Clique der Größe k enthält) ist leicht in polynomieller Zeit lösbar, wenn k konstant ist (warum?). Zeigen Sie, dass es aber NP-vollständig bleibt, wenn man es auf k mit $k = O(n^{\frac{1}{t}})$ ein konstantes t einschränkt. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 18.1.2022, **vor** der Vorlesung im Hörsaal