Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. Betrachten Sie eine Min-Cost-Flow-Instanz (G, u, b, c) mit $u \in \mathbb{N}^{E(G)}$ und $b \in \mathbb{Z}^{V(G)}$. Es sei $r \in V(G)$, und wir definieren eine Perturbation der Knotenbalancen um $\varepsilon \in \mathbb{R}^{V(G)}$ durch $\varepsilon(r) = -\frac{n-1}{n}$ und $\varepsilon(v) = \frac{1}{n}$ für $v \in V(G) \setminus \{r\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Fluss auf jeder Baumkante einer zulässigen Spannbaum-Struktur (r, T, L, U) für $(G, u, b + \varepsilon, c)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{n}$ und außerdem größer als 0 und kleiner als die Kantenkapazität ist.

   (b) Verwenden Sie Teil (a), um zu zeigen, dass der Netzwerk-Simplex-Algorithmus das perturbierte Problem in pseudopolynomieller Zeit löst, und zwar unabhängig von der Wahl der Kante, die in T aufgenommen wird.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Spannbaum-Struktur (r, T, L, U) genau dann für (G, u, b, c) stark zulässig ist, wenn sie für $(G, u, b + \varepsilon, c)$ stark zulässig ist. Schließen Sie daraus, dass der Netzwerk-Simplex-Algorithm auf (G, u, b, c) eine pseudopolynomielle Laufzeit hat. (2+2+3 Punkte)

2. Aufgrund eines erst jetzt entdeckten Fehlers im Buchungssystem hat ein großes Hotel viele Buchungen für das Jahr 2022 angenommen, ohne die Verfügbarkeit freier Zimmer zu prüfen. Jede Buchung betrifft einen bestimmten Zeitraum; es wird aber immer nur ein Zimmer benötigt. Alle Zimmer sind gleichwertig, dennoch wurden die Buchungen zu unterschiedlichen Preisen vorgenommen. Das Hotel möchte nun einigen Kunden absagen, so dass die freien Zimmer ausreichen und möglichst wenige Einnahmen verlorengehen. Wie würden Sie dieses Problem lösen? Kann man erreichen, dass kein Gast während seines Aufenthalts umziehen muss? (4 Punkte)

3. Turingmaschinen können selbst auch durch binäre Strings kodiert werden. Betrachten Sie das Halteproblem: Gegeben seien zwei binäre Strings x und y, wobei x eine Turingmaschine Φ kodiert. Es soll entschieden werden, ob $\text{time}(\Phi, y) < \infty$ gilt.
   Zeigen Sie, dass dieses Problem unentscheidbar ist, dass es also keinen Algorithmus für das Halteproblem gibt. (4 Punkte)

4. Man beschreibe eine Turingmaschine mit Alphabet $\{0, 1, \#\}$, die zwei binäre Strings vergleicht: Der Input bestehe aus einem String $a\#b$ mit $a, b \in \{0, 1\}^*$, und der Output sei 1 für $a = b$ und 0 für $a \neq b$. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 21.12.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal