Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Es sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems mit ganzzahligen Kapazitäten u und ganzzahligen Kosten c. Es sei f ein f-Fluss in (G, u) und f^* ein kostenminimaler b-Fluss in (G, u).

   (a) Zeigen Sie, dass es, falls f nicht schon ein kostenminimaler b-Fluss ist, einen Kreis C im Residualgraph von f gibt, sodass
   $$c(f) - c(f') \geq \frac{1}{|E(G)|}(c(f) - c(f^*))$$
   gilt, wobei f' der Fluss sei, der aus f durch Augmentierung entlang C entstehe, und durch $c(f)$, $c(f')$ und $c(f^*)$ die Kosten der jeweiligen Flüsse angegeben werden.

   (b) Zeigen Sie, dass $O(|E(G)| \log(|E(G)|CU))$ Augmentierungen entlang geeigneter Kreis ausreichen, um aus einem beliebigen b-Fluss einen kostenminimalen b-Fluss zu berechnen, wobei $C := \max\{|c(e)| \mid e \in E(G)\}$ und $U := \max\{u(e) \mid e \in E(G)\}$ sei. (3+2 Punkte)

   Bemerkung: In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass man stets entlang eines Kreises augmentiert, der die größte Verbesserung erzielt, was aber in der Regel zu aufwändig ist.

2. Man betrachte eine Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.

   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+2+2 Punkte)

3. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (4 Punkte)

4. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus entsteht, indem man zwei Änderungen durchführt:

   - Man augmentiert stets um $\gamma' := \min\left\{ \min_{e \in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\} \right\}$.
   - Unter allen kürzesten s-t-Wegen im Residualgraphen wird der augmentierende P so ausgewählt, dass der zugehörige γ'-Wert maximal ist.

   Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus bei ganzzahligen b-Werten und Kapazitäten ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. Zeigen Sie außerdem durch ein Beispiel, dass er mehr Augmentierungen benötigen kann als der (unveränderte) Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 7.12.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal