Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
3. Übung

1. Betrachten Sie die folgende Version einer Union-Find-Struktur: An jedem Repräsentanten einer Menge wird die Größe der repräsentierten Menge gespeichert. Wenn zwei Mengen vereinigt werden, sucht man erst die beiden Repräsentanten x und y der Mengen. Ohne Einschränkung repräsentiere x die größere der beiden Mengen (den Fall gleichgroßer Knotenmengen kann man beliebig behandeln). Dann wird x Repräsentant der vereinigten Menge, indem x der PARENT von y wird. Die Funktion FIND wird wie in der Vorlesung in UNION-BY-BRANCHING realisiert. Zeigen Sie, dass ein Aufruf von FIND(z) für jedes Element z höchstens Laufzeit $O(\log n)$ hat, wobei n die Zahl aller Elemente sei. (5 Punkte)

2. Betrachten Sie eine Union-Find-Struktur, in der zuerst m MAKESET-Operationen, dann u UNION-Operationen, jeweils mit gegebenen Repräsentanten der beteiligten Mengen, und anschließend f FIND-Operationen durchgeführt werden. Zeigen Sie, dass diese Operationen, wenn man Union-By-Rank und Wege-Komprimierung benutzt, in Zeit $O(m + u + f)$ durchgeführt werden können. (5 Punkte)

3. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben seien ein ungerichteter zusammenhängender Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, ein Knoten $v_0 \in V(G)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |\delta_G(v_0)|$. Gesucht ist ein aufspannender Baum T in G, so dass v_0 in T mindestens Grad k hat, der unter allen aufspannenden Bäumen in G, in denen v_0 mindestens Grad k hat, minimales Gewicht hat. Geben Sie einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit an, der dieses Problem löst. (5 Punkte)

4. Sei T ein kostenminimaler aufspannender Baum für einen ungerichteten Graphen G mit nichtnegativen Kantengewichten. G' entstehe aus G, indem ein neuer Knoten s hinzugefügt wird, der mit jedem Knoten aus $V(G)$ durch eine (ebenfalls gewichtete) Kante verbunden ist. Zeigen Sie, wie man aus T und G' in linearer Laufzeit einen kostenminimalen aufspannenden Baum für G' berechnen kann. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 2.11.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal