

Einführung in die Diskrete Mathematik

2. Übung

1. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter einfacher Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Zeigen Sie, dass G genau dann Eulersch ist, wenn jede Kante von G auf einer ungeraden Anzahl von Kreisen liegt. (5 Punkte)
2. Sei G ein ungerichteter Graph. Eine *Orientierung* von G ist ein gerichteter Graph, der aus G entsteht, indem jede ungerichtete Kante $\{v, w\} \in E(G)$ durch eine der beiden gerichteten Kanten (v, w) und (w, v) ersetzt wird.
Sei G nun außerdem zusammenhängend. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) G hat immer eine Orientierung, die azyklisch ist.
 - (b) G hat genau dann eine stark zusammenhängende Orientierung, wenn G keine Brücke enthält.
 - (c) Wenn G eine stark zusammenhängende Orientierung hat, dann ist G Eulersch.
 - (d) Wenn G Eulersch ist, dann hat G eine stark zusammenhängende Orientierung. (1+1+1+1 Punkte)
3. Sei G bzw. G' ein zusammenhängender ungerichteter bzw. stark zusammenhängender gerichteter Graph mit Kantengewichten und k eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass ein billigster Wald mit k Kanten in G stets zu einem billigsten aufspannenden Baum erweitert werden kann, aber ein billigstes Branching mit k Kanten in G' nicht immer zu einer billigsten Arboreszenz. (3 Punkte)
4. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.
Wie lassen sich die folgenden Probleme möglichst effizient lösen?
 - (a) Sei $v \in V(G)$ ein Knoten. Gesucht ist ein aufspannender Baum, in dem v kein Blatt ist und der unter allen aufspannenden Bäumen, in denen v kein Blatt ist, minimales Gewicht hat.
 - (b) Man bestimme die Menge aller Kanten $e \in E(G)$, für die es einen aufspannenden Baum T_e mit minimalem Gewicht gibt, so dass e in T_e enthalten ist.
 - (c) Man bestimme einen aufspannenden zusammenhängenden Teilgraphen von G mit minimalem Gewicht.
 - (d) Man bestimme einen aufspannenden Baum T für G , dessen maximales Kantengewicht minimal ist. (2+2+2+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 26.10.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal