Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
1. Übung

1. Es sei S eine Menge mit n Elementen und $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Teilmengen von S. Zeigen Sie, dass es dann ein $x \in S$ geben muss, für das auch die Mengen $A_i \cup \{x\}$ $(i = 1 \ldots, n)$ paarweise verschieden sind. (5 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie einen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\mathcal{A}$, in dem für jede Kante $\{A_i, A_j\}$ gilt: $|(A_i \setminus A_j) \cup (A_j \setminus A_i)| = 1$.

2. An einem Tennisturnier nehmen genau n Spieler teil. Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen. Es gibt keine Unentschieden. Am Ende soll eine Rangliste der Spieler aufgestellt werden, d.h. eine Nummerierung mit $s_1, \ldots, s_n$, und zwar so, dass s_i gegen s_{i+1} gewonnen hat für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

   (a) Beweisen Sie, dass dies immer möglich ist.

   (b) Finden Sie einen Algorithmus, der die Ergebnisliste als Eingabe bekommt und eine solche Rangliste in $O(n^k)$ Rechenschritten bestimmt, wobei k eine Konstante sei. Wie klein kann k gewählt werden? (5 Punkte)

3. Beim Tennisturnier aus Aufgabe 2 hat jeder Spieler mindestens 25% seiner Spiele gewonnen und mindestens 25% verloren. Beweisen Sie, dass dann der gerichtete Graph stark zusammenhängend ist, dessen Knoten die Spieler sind und der genau dann eine Kante (v, w) enthält, wenn v gegen w gewonnen hat. Zeigen Sie auch, dass die Aussage nicht mehr immer stimmt, wenn man 25% an einer Stelle durch 24% ersetzt. (5 Punkte)

4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
   Wenn G ein stark zusammenhängender gerichteter Graph ist, dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph mindestens einen Kreis ungerader Länge enthält, dann enthält G auch einen gerichteten Kreis ungerader Länge. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, der 19.10.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal