Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (5 Punkte)

2. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:

   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \le \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \le 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (3+2+2 Punkte)

3. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem SUKZESSIVE-KÜRZESTE-WEGE-ALGORITHMUS entsteht, indem man stets um $\gamma' := \min \left\{ \min_{e \in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\} \right\}$ augmentiert. Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus bei ganzzahligen b-Werten und Kapazitäten ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. (3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 7.1.2020, **vor** der Vorlesung.