Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints“) eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine Teilaufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das Minimum-Mean-Cycle-Problem.

   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.

   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (2+2+2 Punkte)

2. Sei (G, u, s, t) ein Flussnetzwerk, und seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ minimale s-t-Schnitte in (G, u). Zeigen Sie, dass dann auch $\delta^+(X \cap Y)$ und $\delta^+(X \cup Y)$ minimale s-t-Schnitte in (G, u) sind. (5 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass im Fall von irrationalen Kapazitäten der Ford-Fulkerson-Algorithmus eventuell nicht terminiert. (4 Punkte)
   Tipp: Betrachten Sie das Netzwerk aus der Abbildung 1. Für die Kantenkapazitäten gelte $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $q \geq \frac{1}{1-r}$. Es gilt also $1 = r + r^2$.

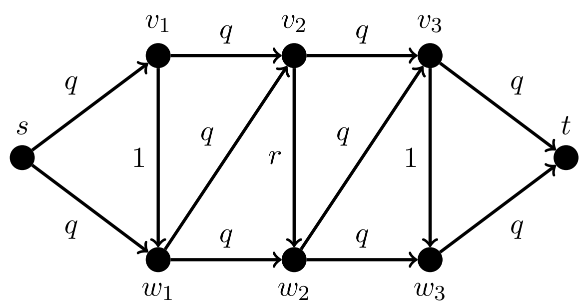

Abbildung 1: Aufgabe 3

4. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 2.12.2019, **vor** der Vorlesung.