Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
3. Übung

1. Es sei G ein azyklischer Graph, und für $v \in V(G)$ sei $\text{comp}(v)$ die von dem Algorithmus STARKE ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN berechnete Zahl. Außerdem sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Ordnung der Knoten von G, sodass $\text{comp}(v_i) \leq \text{comp}(v_j)$ für $i < j$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gelte. Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine topologische Ordnung der Knoten von G ist. (5 Punkte)

2. Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

EULERTOUR

Eingabe: Ein einfacher ungerichteter zusammenhängender Eulerscher Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: Ein Eulerscher Kantenzug in G.

① Setze alle Kanten auf UNMARKIERT.
Wähle $v_0 \in V$ beliebig, und setze $S = v_0$.
RETURN S = EULER(v_0, E, S).

EULER (v, E, S)
WHILE(Es gibt unmarkierte Kante $\{v, w\} \in E$)
{
  Markiere $\{v, w\}$.
  $S :=$ EULER(w, E, S).
  $S := v, \{v, w\}, S$.
}
RETURN S.

Zeigen Sie, dass der Algorithmus korrekt arbeitet und Laufzeit $O(n + m)$ hat. (5 Punkte)

3. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter einfacher Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Zeigen Sie, dass G genau dann Eulersch ist, wenn jede Kante von G auf einer ungeraden Anzahl von Kreisen liegt. (6 Punkte)

4. Für einen ungerichteten Graphen G sei $Z(G) \subseteq V(G)$ sein Zentrum.
   (a) Für welche ungerichteten Graphen H gibt es einen ungerichteten zusammenhängenden Graphen G, so dass H zu $G[Z(G)]$ isomorph ist?
   (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen ungerichteten zusammenhängenden Graphen G mit $Z(G) = V(G)$, so dass G sowohl eine Clique als auch eine stabile Menge der Größe mindestens k enthält. (2+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 29.10.2019, **vor** der Vorlesung.