Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
10. Übung

1. Sei S eine endliche Menge mit einer partiellen Ordnung „$\preceq$“. Beweisen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\preceq$ ist durch Schlüssel induziert;

   (b) $(a \not\preceq b \wedge b \not\preceq c \wedge a \neq c) \Rightarrow a \not\preceq c$ für alle $a, b, c \in S$;

   (c) $\{(x, y) \in S \times S \mid x = y \vee (x \not\preceq y \wedge y \not\preceq x)\}$ ist eine Äquivalenzrelation. (6 Punkte)

2. Modifizieren Sie den Merge-Sort-Algorithmus so, dass Sie die gegebene Menge S nicht mehr in zwei, sondern in b (mit $3 \leq b \leq n$) Teilmengen $S_1, \ldots, S_b$ aufteilen. Diese Teilmengen sollen natürlich möglichst ähnliche Größen haben, d.h. je zwei von ihnen sollen sich in ihren Größen höchstens um 1 unterscheiden. Die Mengen $S_1, \ldots, S_b$ werden dann rekursiv sortiert und die sortierten Teilmengen anschließend zu einer sortierten Gesamtmenge verschmolzen.

   (a) Zeigen Sie, dass das Verschmelzen der Teillösungen in Zeit $O(n \log b)$ möglich ist.

   (b) Führen Sie eine asymptotische Laufzeitanalyse des Verfahrens durch. (3+3 Punkte)

3. Bestimmen Sie die maximale Zahl der Vergleiche, die bei

   (a) Merge-Sort

   (b) Quick-Sort

   benötigt werden, um fünf Elemente $a_1, \ldots, a_5$ zu sortieren. Vergleichen Sie die Resultate mit der unteren Schranke für das Sortieren von fünf Elementen. (4 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass man, wenn n Elemente mit Schlüsseln gegeben sind, in Zeit $O(n)$ einen Binärheap für diese Elemente aufbauen kann. (4 Punkte)

Öffnungszeiten des Help Desks: Dienstags, 13 – 16 Uhr und donnerstags, 10 – 13 Uhr, jeweils in Raum N1.002, Endenicher Allee 60, Nebengebäude.

Abgabe: Montag, den 9.1.2017, **vor** der Vorlesung.