Wintersemester 2016/17
Professor Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
5. Übung

1. Sei $F = F(b, m, E_{\min}, E_{\max})$ ein Maschinenzahlbereich mit $m > 1$ und $E_{\min} < E_{\max}$.
   (a) Was ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht in F ist?
   (b) Man zeige, dass $\text{eps}(F)$ nicht in F liegt.
   (c) Sei $x \in F$ mit $\min\{f \in F, f > 0\} < x < \max F$. Geben Sie in Abhängigkeit von $\text{eps}(F)$ an, wie viele signifikante Dezimalstellen x mindestens hat. (1+2+2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass das Assoziativgesetz für die Multiplikation in der Maschinenzahlarithmetik bezüglich F_{double} nicht gilt, selbst wenn alle Zwischenprodukte in $\text{range}(F_{\text{double}})$ liegen. (3 Punkte)

3. Betrachten Sie folgendes Problem: Es sei eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass für alle $x, y, \alpha \in [0,1]$ gilt: $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. Die Funktion sei über ein Orakel gegeben, das zu einem beliebigen Wert $x \in [0,1]$ den Wert $f(x)$ ausgibt. Außerdem sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist ein $x^* \in [0,1]$, für das es ein $\tilde{x}$ mit $|x^* - \tilde{x}| < \epsilon$ gibt, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt: $f(\tilde{x}) \leq f(x)$. Zeigen Sie, dass $O(\lceil \log\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) \rceil)$ Abfragen von Funktionswerten reichen, um ein solches x^* zu berechnen. (6 Punkte)

4. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird:
   (a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ für $x \gg 1$ (d.h. x ist wesentlich größer als 1).
   (b) $\sqrt[3]{1+x} - 1$ für $x \approx 0$.
   (c) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$. (1+1+1 Punkte)

5. Berechnen Sie die Kondition der folgenden Funktionen und geben Sie an, wo die Funktionsauswertung qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist.
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$
   (b) $f(x) = y^x = e^{x \ln y}$ für ein festes $y > 0$
   (c) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$ (1+1+1 Punkte)

Öffnungszeiten des Help Desks: Dienstags, 13 – 16 Uhr und donnerstags, 10 – 13 Uhr, jeweils in Raum N1.002, Endenicher Allee 60, Nebengebäude.

Abgabe: Montag, den 21.11.2016, **vor** der Vorlesung.