

Algorithmische Mathematik I

1. Übung

1. Sei A eine endliche Menge und $f : A \rightarrow A$ eine Funktion. Für alle $a \in A$ sei $f_0(a) := a$ und $f_i(a) := f(f_{i-1}(a))$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist injektiv.
- (b) f ist surjektiv.
- (c) Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f_i = f_0$.

Welche der sechs Implikationen gelten auch, wenn A unendlich ist? (6 Punkte)

2. Für eine Menge A bezeichnen wir mit 2^A die Potenzmenge von A , d.h. die Menge aller Teilmengen von A . Sei nun A eine endliche Menge.

- (a) Beweisen Sie $|2^A| = 2^{|A|}$.
- (b) Sei $R := \{(B, C) \in 2^A \times 2^A : B \subseteq C\}$. Zeigen Sie $|R| = 3^{|A|}$. (2+3 Punkte)

3. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass b genau dann Teiler von a ist, wenn $a \bmod b = 0$ ist. (4 Punkte)

4. Überprüfen Sie anhand von sinnvollen Beispielen, wie Ihr C++-Compiler Ausdrücke der Form $\mathbf{a\%b}$ und $\mathbf{a/b}$ auswertet, wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} Variablen vom Typ `int` sind, von denen mindestens eine nicht positiv ist. Geben Sie drei aufschlussreiche Beispiele an. Finden Sie anschließend mathematische Formeln für den Wert von $\mathbf{a\%b}$ und $\mathbf{a/b}$, die dem Verhalten Ihres Compilers entsprechen. (5 Punkte)

Abgabe: Montag, den 24.10.2016, vor der Vorlesung.