Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
14. Übung

1. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass man zu einem gegebenen ungerichteten Graphen G in polynomieller Laufzeit ein Matching M bestimmen kann, für das es keinen M-augmentierenden Weg in G gibt, der weniger als k Kanten hat. Um welchen Faktor kann ein solches Matching höchstens kleiner sein als ein kardinalitätsmaximales Matching? Zeigen Sie, dass die von Ihnen bewiesene Schranke bestmöglich ist. (5 Punkte)

2. Ein Graph heißt *k-regulär*, wenn jeder Knoten Grad k hat. Man beweise, dass ein k-regulärer bipartiter Graph k paarweise disjunkte perfekte Matchings besitzt. Man folgere daraus, dass die Kantenmenge eines bipartiten Graphen mit maximalem Grad k in k Matchings partitioniert werden kann. (5 Punkte)

3. Im Achtelfinale der UEFA-Champions-League werden 16 Mannschaften gegeneinander gelost. Jede dieser Mannschaften hat in der Runde zuvor einen der ersten beiden Plätze in einer von 8 Qualifikationsgruppen belegt. Bei der Auslosung des Achtelfinales sind folgende Regeln zu beachten:

   – Es wird immer ein Gruppenerster gegen einen Gruppenzweiten gelost.

   – Kein Gruppenerster spielt im Achtelfinale gegen den Gruppenzweiten aus der eigenen Gruppe.

   – Keine Mannschaft spielt im Achtelfinale gegen eine Mannschaft aus dem eigenen Land.

   Nach den gegenwärtigen Regeln können aus jedem Land höchstens vier Mannschaften an der Champions-League teilnehmen. Zeigen Sie, dass es immer eine Achtelfinalauslosung gibt, die den obigen Bedingungen genügt. (5 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass im Fall von irrationalen Kapazitäten der Ford-Fulkerson-Algorithmus eventuell nicht terminiert. (5 Punkte)
   Tipp: Netzwerk aus der Abbildung 1.

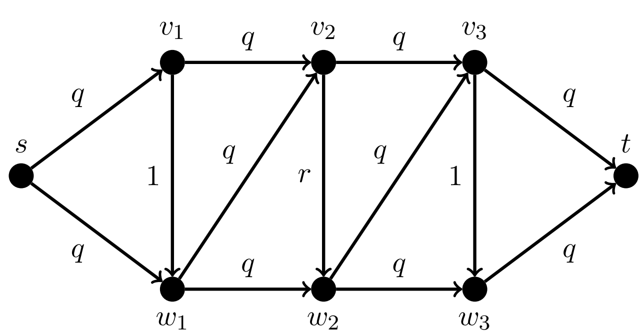

Abbildung 1: Aufgabe 4

Für die Kantenkapazitäten gelte $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $q \geq \frac{1}{1-r}$. Es gilt also $1 = r + r^2$.

Abgabe: Montag, den 26.1.2015, **vor** der Vorlesung.