Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

# Algorithmische Mathematik I
## 13. Übung

1. Angenommen, alle Kantengewichte sind ganzzahlig und liegen zwischen 0 und einer Konstante $C$. Zeigen Sie, dass es dann einen Algorithmus mit linearer Laufzeit für das Kürzeste-Wege-Problem gibt. (4 Punkte)

2. Es sei $G$ ein gerichteter Graph und $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $c$ genau dann konservativ ist, wenn es eine Abbildung $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle Kanten $e = (v, w) \in E(G)$ gilt: $\pi(v) + c(e) - \pi(w) \geq 0$. (4 Punkte)

3. Betrachten Sie die folgenden Modifikationen des Moore-Bellman-Ford-Algorithmus:

   (a) Numeriere die Knoten des gegebenen Graphen $G$ in einer beliebigen Reihenfolge, es sei also $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Betrachte nun in jeder Iteration die Kanten in folgender Reihenfolge: Durchlaufe die Knoten von $v_1$ nach $v_n$ und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten $v_i$ alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $i < j$, um $l(v_j)$ neu zu setzen. Durchlaufe anschließend alle Knoten von $v_n$ nach $v_1$ und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten $v_i$ alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $j < i$, um $l(v_j)$ neu zu setzen. Zeigen Sie, dass, wenn man in jeder Iteration alle Kanten in dieser Reihenfolge betrachtet, $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ Iterationen ausreichend sind.

   (b) Statt $(n-1)$-mal alle Kanten zu betrachten, wählen wir, solange es eine Kante $(v, w)$ mit $l(w) > l(v) + c((v, w))$ gibt, eine beliebige solche Kante aus und setze $l(w) = l(v) + c((v, w))$. Zeigen Sie, dass diese Vorgehensweise bei einer ungeschickten Wahl der Kantenreihenfolge eine exponentielle Zahl von Knotenlabel-Änderungen notwendig machen kann. (4+4 Punkte)

4. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für das folgende Problem (mit Bestimmung der asymptotischen Laufzeit):
   Gegeben seien ein gerichteter Graph $G$ mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s, t \in V(G)$. Gesucht ist ein $s$–$t$–Weg, dessen längste Kante möglichst kurz ist. (4 Punkte)

Abgabe: Montag, den 19.1.2015, **vor** der Vorlesung.