Wintersemester 2014/15 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Professor Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Algorithmische Mathematik I
11. Übung

1. Sei S eine endliche Menge mit einer partiellen Ordnung „$\preceq$“. Beweisen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\preceq$ ist durch Schlüssel induziert;

   (b) $(a \not\preceq b \wedge b \not\preceq c \wedge a \neq c) \Rightarrow a \not\preceq c$ für alle $a, b, c \in S$;

   (c) $\{(x, y) \mid x = y \vee (x \not\preceq y \wedge y \not\preceq x)\}$ ist eine Äquivalenzrelation. (6 Punkte)

2. In dieser Aufgabe sollen Binärstrings (d.h. Wörter über $\{0, 1\}$) lexikographisch sortiert werden. Wenn s und t zwei Binärstrings der Länge m sind, dann heißt s *lexikographisch kleiner als* t, wenn es einen Index $j \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass s und t an den ersten $j-1$ Stellen identisch sind, s an der Stelle j den Wert 0 hat und t an der Stelle j den Wert 1 hat. Zeigen Sie, dass man n Binärstrings der Länge m in Zeit $O(mn)$ (also in linearer Laufzeit) lexikographisch sortieren kann. (4 Punkte)

3. Modifizieren Sie den Merge-Sort-Algorithmus so, dass Sie die gegebene Menge S nicht mehr in zwei, sondern in b (mit $3 \leq b \leq n$) Teilmengen $S_1, \ldots, S_b$ aufteilen. Diese Teilmengen sollen natürlich möglichst ähnliche Größen haben, d.h. je zwei von ihnen sollen sich in ihren Größen höchstens um 1 unterscheiden. Die Mengen $S_1, \ldots, S_b$ werden dann rekursiv sortiert und die sortierten Teilmengen anschließend zu einer sortierten Gesamtmenge verschmolzen.

   (a) Zeigen Sie, dass das Verschmelzen der Teillösungen in Zeit $O(n \log b)$ möglich ist.

   (b) Führen Sie eine asymptotische Laufzeitanalyse des Verfahrens durch. (3+3 Punkte)

4. Bestimmen Sie die maximale Zahl der Vergleiche, die bei

   (a) Merge-Sort

   (b) Quick-Sort

   benötigt werden, um fünf Elemente $a_1, \ldots, a_5$ zu sortieren. Vergleichen Sie die Resultate mit der unteren Schranke für das Sortieren von fünf Elementen. (4 Punkte)

Abgabe: Montag, den 22.12.2014, **vor** der Vorlesung.