Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
7. Übung

1. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird:
   (a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ für $x \gg 1$ (d.h. x ist wesentlich größer als 1).
   (b) $\sqrt[3]{1+x} - 1$ für $x \approx 0$.
   (c) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$.
   (d) $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ für $x \gg 1$. (1+1+1+1 Punkte)

2. Berechnen Sie die Kondition der folgenden Funktionen und geben Sie an, wo die Funktionsauswertung qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist.
   (a) $f(x) = \arcsin(x), \quad x \in [-1, 1]$
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$
   (c) $f(x) = y^x = e^{x \ln y}$ für ein festes $y > 0$
   (d) $f(x) = \frac{1}{x}$ (1+1+1+1 Punkte)

3. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ von Stichproben bezeichne

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   den Mittelwert der Stichprobe. Zur Berechnung der Varianz der Stichprobe stehen die Formeln

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \quad \text{und} \quad s_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - \bar{x}^2)$$

   zur Verfügung.
   (a) Zeigen Sie, dass $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2$ gilt.
   (b) Welche der drei Formeln ist im Hinblick auf die numerische Stabilität die günstigste? (3+3 Punkte)

4. Man kann die Quadratwurzel einer Zahl $a \geq 0$ auch mit dem Newtonverfahren angewandt auf $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$ berechnen. Dabei können wir uns auf Eingaben a und Startwerte x_0 mit $1 \leq a < 4$ und $1 \leq x_0 \leq 2$ beschränken.
   (a) Wie sieht eine Iteration dieses Verfahrens aus? Berechnen Sie x_1, x_2, x_3 für $a = 3$ und $x_0 = 1$.
   (b) Beweisen Sie, dass auch diese Variante quadratisch konvergiert.
   (c) Ist das Verfahren besser als das babylonische Wurzelziehen? (2+2+2 Punkte)

Abgabe: Montag, den 24.11.2014, **vor** der Vorlesung.