Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
6. Übung

1. (a) Was ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht in $F_{\texttt{double}}$ ist?

   (b) Man zeige, dass für jeden Maschinenzahlbereich F gilt: $\text{eps}(F) \notin F$.

   (c) Sei $F = F(b, m, E_{\min}, E_{\max})$ ein Maschinenzahlbereich und rd eine Rundung zu F. Sei $x \in \text{range}(F)$. Zeigen Sie, dass dann ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existiert mit $|\varepsilon| \leq \text{eps}(F)$ und $\text{rd}(x) = x \cdot (1 + \varepsilon)$.
   (2+2+2 Punkte)

2. Wenn eps die Maschinengenauigkeit eines Maschinenzahlbereichs ist, wie viele signifikante Dezimalstellen hat eine von 0 verschiedene Zahl in diesem Maschinenzahlbereich dann mindestens? (4 Punkte)

3. Kompilieren Sie ohne Optimierung das folgende Programm (das von der Übungsseite heruntergeladen werden kann). Wie erklären Sie sich die Ergebnisse, die es berechnet? (5 Punkte)

```
#include <iostream>
#include <iomanip>

int main()
{
      float w = 0;
      double x = 0, y = 0, z = 0;

      for (long i=1; i<=100000000; ++i) w+=1;
      for (long i=1; i<=100000000; ++i) x+=1;
      for (long i=1; i<=1000000000; ++i) y+=.1;
      for (long i=1; i<=10000000000; ++i) z+=.1;

      std::cout << std::setprecision(15)
                << "w=" << w << "\n"
                << "x=" << x << "\n"
                << "y=" << y << "\n"
                << "z=" << z << "\n";

}
```

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Es sei eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass für alle $x, y, \alpha \in [0,1]$ gilt: $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. Die Funktion sei über ein Orakel gegeben, das zu einem beliebigen Wert $x \in [0,1]$ den Wert $f(x)$ ausgibt. Außerdem sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist ein $x^* \in [0,1]$, für das es ein $\tilde{x}$ mit $|x^* - \tilde{x}| < \epsilon$ gibt, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt: $f(\tilde{x}) \leq f(x)$. Zeigen Sie, dass $O(\lceil \log\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) \rceil)$ Abfragen von Funktionswerten reichen, um ein solches x^* zu berechnen. (5 Punkte)

   Hinweis: Modifizeren Sie die binäre Suche auf geeignete Weise.

Abgabe: Montag, den 17.11.2014, **vor** der Vorlesung.