Wintersemester 2014/15
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
4. Übung

1. In dieser Aufgabe betrachten wir Komplementdarstellungen zur Basis 2.
   (a) Schreiben Sie die Zahl -25 in Komplementdarstellung mit 8 Bits und mit 16 Bits.
   (b) Sei z die Komplementdarstellung einer negativen Zahl mit l Bits. Welche Zahl entsteht, wenn man in z jede 0 durch eine 1 und jede 1 durch eine 0 ersetzt?
   (c) Für welche negativen Zahlen x ist die Komplementdarstellung mit l Bits bis auf die Vorzeichenstelle identisch mit der Komplementdarstellung von $-x$?
   (d) Sei z die Komplementdarstellung einer negativen Zahl mit l Bits. Wie sieht die Darstellung derselben Zahl aus, wenn $2l$ Stellen für die Komplementdarstellung zur Verfügung stehen?
   Bemerkung: Eine solche Umwandlung kann zum Beispiel notwendig werden, wenn eine Variable vom Typ `short` in eine Variable vom Typ `long` umgewandelt wird.
   (1+1+1+1 Punkte)

2. Für eine natürliche Zahl n sei $q(n) := \sum_{i=0}^{l-1} z_i$, wobei $z_{l-1} \dots z_0$ die Dezimaldarstellung von n sei. $q(n)$ heißt *Quersumme* von n. Für $t \in \mathbb{N}$ definieren wir $q_t(n)$ rekursiv durch $q_1(n) = q(n)$ und $q_{t+1}(n) = q(q_t(n))$. Es sei außerdem $q^*(n) = q_{t_0}(n)$, wobei t_0 die kleinste natürliche Zahl sei, für die $q_{t_0}(n)$ eine Dezimaldarstellung der Länge 1 hat.
   Seien nun a und b natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass dann gilt: $q^*(q^*(a) \cdot q^*(b)) = q^*(a \cdot b)$.
   (5 Punkte)

3. Sei A eine endliche Menge mit $|A| \geq 2$, und sei $l \in \mathbb{N}$. Wie groß kann eine Menge X von Wörtern der Länge l über dem Alphabet A maximal sein, wenn sich je zwei Elemente von X an mindestens zwei Stellen unterscheiden? Geben Sie (in Abhängigkeit von $|A|$ und l) eine obere Schranke für $|X|$ an, und zeigen Sie, dass diese Schranke scharf ist.
   (5 Punkte)

4. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $c, d \geq 0$ und $2 \leq b < a$. Außerdem sei $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton steigende Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:
   - $T(n) \leq d$ für $n \leq b$ und
   - $T(n) \leq c \cdot n + a \cdot T\left(\lceil \frac{n}{b} \rceil\right)$ für $n > b$.

   Zeigen Sie, dass dann $T(n) = O(n^{\log_b(a)})$ gilt. (6 Punkte)

Abgabe: Montag, den 3.11.2014, **vor** der Vorlesung.