Wintersemester 2013/14
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik

12. Übung

1. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in *NP* sind:

   (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph G, Kantengewichte $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und eine natürliche Zahl k. Gibt es einen aufspannenden Subgraphen H von G mit $|E(H)| \le k$ und Gewichte $c' : E(H) \to \mathbb{R}_+$, so dass

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t) \le \operatorname{dist}_{(H,c')}(s,t) \le \sqrt{2} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t)$$

   für alle $s, t \in V(G)$ gilt?

   (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen a_i, b_i für $i = 1, \dots, n$. Kann man n Quadrate mit Kantenlängen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen. (3+3 Punkte)

2. Man beweise: Ist $\mathcal{P} \in NP$, so gibt es ein Polynom p, so dass für $\mathcal{P}$ ein Algorithmus mit Laufzeit $O(2^{p(n)})$ existiert, wobei n die Länge der Eingabe sei. (2 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass 2SAT, also die Einschränkung des SATISFIABILITY-Problems auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens zwei Literale hat, in polynomieller Zeit lösbar ist. (5 Punkte)

4. Man beschreibe einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jede SATISFIABILITY-Instanz eine Wahrheitsbelegung bestimmt, die mindestens die Hälfte aller Klauseln erfüllt. (2 Punkte)

5. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge X sei wie folgt definiert: „true“ und „false“ sind boolesche Formeln der Länge 0. „x“ und „$\bar{x}$“ (für $x \in X$) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind ϕ und ϕ' boolesche Formeln der Längen k bzw. k', dann sind „$(\phi \wedge \phi')$“ und „$(\phi \vee \phi')$“ boolesche Formeln der Länge $k + k'$. Weitere boolesche Formeln gibt es nicht. Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn $P = NP$ gilt. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 21.1.2014, vor der Vorlesung.