Einführung in die Diskrete Mathematik

5. Übung

1. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints“) eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine wichtige Aufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das Minimum-Mean-Cycle-Problem.

   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.

   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (2+2+2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass im Fall von irrationalen Kapazitäten der Ford-Fulkerson-Algorithmus eventuell nicht terminiert.
   Tipp: Netzwerk aus der Abbildung 1.

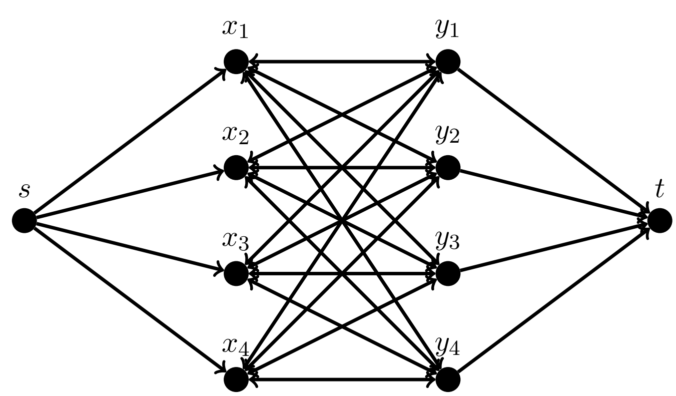

Abbildung 1: Aufgabe 2

Die Kanten zwischen den Mengen $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ und $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ sind in beide Richtungen definiert und haben Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$, außer $u((x_1, y_1)) = 1, u((x_2, y_2)) = \sigma, u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2$ mit $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (es gilt also $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$). Die zu s oder t inzidenten Kanten haben Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$. (5 Punkte)

3. Sei G ein gerichteter Graph mit konservativen Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Es seien $s, t \in V(G)$ zwei Knoten, so dass t von s aus erreichbar ist. Außerdem gelte für jede Kante $e \in E(G)$, dass $\mathrm{dist}_{G-e,c}(s,t) = \mathrm{dist}_{G,c}(s,t)$. Zeigen Sie, dass es dann zwei kantendisjunkte kürzeste s-t-Wege in (G, c) gibt. (5 Punkte)

4. Man betrachte einen ungerichteten Graphen G mit Kantenzusammenhang $k \in \mathbb{N}$ und (nicht notwendigerweise verschiedenen) Knoten $v_1, \ldots, v_k \in V(G)$. Außerdem sei $v_0 \in V(G) \setminus \{v_1, \ldots, v_k\}$. Zeigen Sie, dass es in G paarweise kantendisjunkte Wege $P_1, \ldots, P_k$ gibt, so dass P_i ein v_0-v_i-Weg ist ($i = 1, \ldots, k$). (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 19.11.2013, vor der Vorlesung.