Wintersemester 2012/13
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Ein Restaurantbesitzer steht vor folgendem Problem: Er weiß, daß er für den Tag i der nächsten Woche d_i frische Servietten benötigt ($i = 1, \dots, 7$). Jeden Morgen kann er frische Servietten zum Preis von a Euro pro Stück kaufen. Ferner kann er jeden Abend einen Teil seiner Servietten in die Reinigung geben. Dabei gibt es die Schnellreinigung und die Standardreinigung zum Preis von b Euro pro Serviette bzw. c Euro pro Serviette. Bei der Standardreinigung erhält man die Servietten am übernächsten Tag morgens gereinigt zurück. Die Schnellreinigung liefert die Servietten bereits am nächsten Morgen. Es gilt $b < c < a$. Führen Sie das Problem, eine kostenminimale "Serviettenstrategie" zu finden, auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem zurück. (4 Punkte)

2. Man betrachte eine Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluß f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.

   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluß in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (4 Punkte)

3. Sei (G, u, c, b) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (4 Punkte)

4. Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Es gibt genau dann eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)$, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \text{ für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 10.1.2013, vor der Vorlesung.