Wintersemester 2012/13
Professor Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
12. Übung

1. Betrachten Sie die folgende Variante des MOORE-BELLMAN-FORD-ALGORITHMUS: Nummeriere die Knoten des gegebenen Graphen G in einer beliebigen Reihenfolge, es sei also $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Betrachte nun in jeder Iteration die Kanten in folgender Reihenfolge:

   Durchlaufe die Knoten von v_1 nach v_n und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten v_i alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $i < j$, um ggfs. $l(v_j)$ und $p(v_j)$ neu zu setzen. Durchlaufe anschließend alle Knoten von v_n nach v_1 und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten v_i alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $j < i$, um ggfs. $l(v_j)$ und $p(v_j)$ neu zu setzen.

   Zeigen Sie, dass dann $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Iterationen ausreichen. (5 Punkte)

2. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass man zu einem gegebenen ungerichteten Graphen G in polynomieller Laufzeit ein Matching M bestimmen kann, für das es keinen M-augmentierenden Weg in G gibt, der weniger als k Kanten hat. Um welchen Faktor kann ein solches Matching höchstens kleiner sein als ein kardinalitätsmaximales Matching? Zeigen Sie, dass die von Ihnen bewiesene Schranke bestmöglich ist. (5 Punkte)

3. Ein Graph heißt *k-regulär*, wenn jeder Knoten Grad k hat. Man beweise, dass ein k-regulärer bipartiter Graph k paarweise disjunkte perfekte Matchings besitzt. Man folgere daraus, dass die Kantenmenge eines bipartiten Graphen mit maximalem Grad k in k Matchings partitioniert werden kann. (5 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, Zahlen $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ gegeben. Es soll nun eine Matrix $(\alpha_{ij})_{i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit folgenden Eigenschaften gefunden werden oder entschieden werden, dass keine existiert:

   - $\alpha_{ij} \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$;
   - $\alpha_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \in S$;
   - $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$;
   - $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = y_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

   Zeigen Sie, dass sich dieses Problem auf das Fluss-Problem zurückführen läßt. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 15.1.2013, **vor** der Vorlesung.

Öffnungszeiten des Help Desks: montags, 12 – 14 Uhr und freitags, 12 – 14 Uhr in Raum N1.002 und donnerstags, 18 – 20 Uhr in Raum N0.003.