Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
10. Übung

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f(n)$ die maximale Zahl von Vergleichen (Orakelaufrufen), die Merge-Sort auf einer Menge von n Elementen benötigen kann. Aus der Vorlesung wissen wir $f(n) = \Theta(n \log n)$. Geben eine obere Schranke für $f(n)$ an, die für unendlich viele Werte von n exakt ist, d.h. eine (einfach berechenbare) Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(n) = g(n)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. (5 Punkte)

2. Modifizieren Sie den Merge-Sort-Algorithmus so, dass Sie die gegebene Menge S nicht mehr in zwei, sondern in b (mit $3 \leq b \leq n$) Teilmengen $S_1, \ldots, S_b$ aufteilen. Diese Teilmengen sollen natürlich möglichst ähnliche Größen haben, d.h. je zwei von ihnen sollen sich in ihren Größen höchstens um 1 unterscheiden. Die Mengen $S_1, \ldots, S_b$ werden dann rekursiv sortiert und die sortierten Teilmengen anschließend zu einer sortierten Gesamtmenge verschmolzen.

   (a) Zeigen Sie, dass das Verschmelzen der Teillösungen in Zeit $O(n \log b)$ möglich ist.

   (b) Führen Sie eine asymptotische Laufzeitanalyse des Verfahrens durch. (3+3 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass man, wenn n Elemente mit Schlüsseln gegeben sind, in Zeit $O(n)$ einen Binärheap für diese Elemente aufbauen kann. (5 Punkte)

4. Sei (G, c) eine Instanz des Minimum-Spanning-Tree-Problems, bei der $c(e) \neq c(e')$ für je zwei verschiedene Kanten e und e' gilt. Zeigen Sie, dass es dann nur eine optimale Lösung geben kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 18.12.2012, **vor** der Vorlesung.

Öffnungszeiten des Help Desks: montags, 12 – 14 Uhr und freitags, 12 – 14 Uhr in Raum N1.002 und donnerstags, 18 – 20 Uhr **in Raum N0.003**.