Wintersemester 2012/13
Professor Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
4. Übung

1. Für eine natürliche Zahl n sei $q(n) := \sum_{i=0}^{l-1} z_i$, wobei $z_{l-1} \dots z_0$ die Dezimaldarstellung von n sei. $q(n)$ heißt *Quersumme* von n. Für $t \in \mathbb{N}$ definieren wir $q_t(n)$ rekursiv durch $q_1(n) = q(n)$ und $q_{t+1}(n) = q(q_t(n))$. Es sei außerdem $q^*(n) = q_{t_0}(n)$, wobei t_0 die kleinste natürliche Zahl sei, für die $q_{t_0}(n)$ eine Dezimaldarstellung der Länge 1 hat.
   Seien nun a und b natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass dann gilt: $q^*(q^*(a) \cdot q^*(b)) = q^*(a \cdot b)$.
   (6 Punkte)

2. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $c, d \geq 0$ und $2 \leq b < a$. Außerdem sei $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton steigende Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

   - $T(n) \leq d$ für $n \leq b$ und
   - $T(n) \leq c \cdot n + a \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right)$ für $n > b$.

   Zeigen Sie, dass dann $T(n) = O(n^{\log_b(a)})$ gilt. (6 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass es für alle natürlichen Zahlen m und n ganze Zahlen s und t gibt, für die $\mathrm{ggT}(n, m) = s \cdot m + t \cdot n$ gilt. (4 Punkte)

4. Beweisen Sie die Korrektheit der Funktion `gcd2` aus dem Programm 3.8, das in der Vorlesung vorgestellt wurde. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 6.11.2012, **vor** der Vorlesung.

Öffnungszeiten des Help Desks: montags, 12 – 14 Uhr, donnerstags, 18 – 20 Uhr und freitags, 12 – 14 Uhr, jeweils in Raum N1.002.