Einführung in die Diskrete Mathematik

13. Übung

1. Eine Firma schätzt, daß sie in Kalenderwoche i bis zu p_i Autos produzieren kann und bis zu v_i Autos verkaufen kann ($i = 1, \dots, 52$). Produzierte Autos stehen ab Beginn der folgenden Kalenderwoche zum Verkauf bereit. Ein in Woche i produziertes und in Woche $j > i$ verkauftes Auto belegt in den Wochen $i + 1, \dots, j$ Lagerraum. Die Firma kann immer nur höchstens l Autos lagern. In der ersten Kalenderwoche wird nicht produziert, d.h. $p_1 = 0$, es stehen aber aus der Vorjahresproduktion noch p_0 produzierte Autos im Lager.

   (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Firma möchte feststellen, wieviele Autos sie bis zur k-ten Kalenderwoche maximal verkaufen kann.

   (b) Außerdem möchte sie wissen, ob sich diese Zahl verringert, wenn sie die Produktion auch in der zweiten Kalenderwoche ruhen lässt.

   (c) Bei Produktionskosten von P und Verkaufserlösen von V je Auto, sowie Lagerkosten von L je Auto und Woche stellt sich die Frage, wann wieviele Autos produziert werden sollen, um den Gewinn zu maximieren. Ignorieren Sie dabei Zinseffekte. (4 Punkte)

   Können Sie der Firma helfen?

2. Sei (G, u, c, b) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so daß π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, daß eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:

   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \le \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \le 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, daß es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(n^3)$ Zeit findet. (4 Punkte)

3. Was passiert, wenn man im SUKZESSIVE-KÜRZESTE-WEGE-ALGORITHMUS einen beliebigen, nicht notwendigerweise kürzesten Weg zum Augmentieren auswählt? Erreicht man bei ganzzahligen Kapazitäten und b-Werten weiterhin immer einen kostenminimalen Fluß? (4 Punkte)

4. Betrachten Sie das folgende Problem: Gegeben sei ein stark zusammenhängender gerichteter Graph G mit nichtnegativen reellen Kantengewichten c. Gesucht ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so daß der Graph, der $f(e)$ Kopien von jedem $e \in E(G)$ und $V(G)$ als Knotenmenge enthält, Eulersch ist. Dabei soll $\sum_{e \in E(G)} c(e) f(e)$ minimiert werden. Man gebe einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem an. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 24.1.2012, vor der Vorlesung.