Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

# Einführung in die Diskrete Mathematik

## 12. Übung

1. Sei $(G, u, c, b)$ eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Sei $e_0 \in E(G)$ eine Kante mit $c(e_0) > (|V(G)| - 1) \max_{e \in E(G) \setminus \{e_0\}} |c(e)|$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn es einen $b$-Fluß $g$ in $(G, u)$ mit $f(e_0) = 0$ gibt, dann gilt $f(e_0) = 0$ für jede Optimallösung $f$. (4 Punkte)

2. Man betrachte eine Verallgemeinerung des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten $e$). Eine Instanz $(G, u, b, c)$ heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen $b$-Fluss $f$ in $(G, u)$ gibt mit $c(f) < \gamma$.

   (a) Man zeige, daß eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen $b$-Fluss in $(G, u)$ gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

   (c) Man zeige, daß in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (4 Punkte)

3. Das gebrochene $b$-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph $G$, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e) f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEM lösen kann.

   (b) Man zeige, daß, wenn $b$ und $u$ ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung $f$ existiert (d.h. $2f(e)$ muß für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (4 Punkte)

4. Aufgrund eines erst jetzt entdeckten Fehlers im Buchungssystem hat ein großes Hotel viele Buchungen angenommen, ohne die Verfügbarkeit freier Zimmer zu prüfen. Jede Buchung betrifft einen bestimmten Zeitraum; es wird aber immer nur ein Zimmer benötigt. Alle Zimmer sind gleichwertig, dennoch wurden die Buchungen zu unterschiedlichen Preisen vorgenommen. Das Hotel möchte nun einigen Kunden absagen, so daß die freien Zimmer ausreichen, und möglichst wenige Einnahmen verlorengehen. Wie würden Sie dieses Problem lösen? Kann man erreichen, daß kein Gast während seines Aufenthalts umziehen muss? (4 Punkte)
   Tip: Formulieren Sie dies als Minimum-Cost-Flow-Problem, wobei jeder Tag einem Knoten entspricht.

Abgabe: Dienstag, den 17.1.2012, vor der Vorlesung.