Wintersemester 2009/10
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Aufgrund eines erst jetzt entdeckten Fehlers im Buchungssystem hat ein großes Hotel für 2010 viele Buchungen angenommen, ohne die Verfügbarkeit freier Zimmer zu prüfen. Jede Buchung betrifft einen bestimmten Zeitraum; es wird aber immer nur ein Zimmer benötigt. Alle Zimmer sind gleichwertig, dennoch wurden die Buchungen zu unterschiedlichen Preisen vorgenommen. Das Hotel möchte nun einigen Kunden absagen, so daß die freien Zimmer ausreichen, und möglichst wenige Einnahmen verlorengehen. Wie würden Sie dieses Problem lösen? Kann man erreichen, daß kein Gast während seines Aufenthalts umziehen muß? (4 Punkte)
   Tip: Formulieren Sie dies als Minimum-Cost-Flow-Problem, wobei jeder Tag einem Knoten entspricht.

2. Ein Restaurantbesitzer steht vor folgendem Problem: Er weiß, daß er für den Tag i der nächsten Woche d_i frische Sevietten benötigt ($i = 1, \dots, 7$). Jeden Morgen kann er frische Sevietten zum Preis von a Euro pro Stück kaufen. Ferner kann er jeden Abend einen Teil seiner Sevietten in die Reinigung geben. Dabei gibt es die Schnellreinigung und die Standardreinigung zum Preis von b Euro pro Serviette bzw. c Euro pro Serviette. Bei der Standardreinigung erhält man die Servietten am übernächsten Tag morgens gereinigt zurück. Die Schnellreinigung liefert die Servietten bereits am nächsten Morgen. Es gilt $b < c < a$. Führen Sie das Problem, eine kostenminimale "Serviettenstrategie" zu finden, auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem zurück. (4 Punkte)

3. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e\in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEM lösen kann.

   (b) Man zeige, daß, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muß für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (4 Punkte)

4. Was passiert, wenn man im SUKZESSIVE-KÜRZESTE-WEGE-ALGORITHMUS einen beliebigen, nicht notwendigerweise kürzesten Weg zum Augmentieren auswählt? Erreicht man bei ganzzahligen Kapazitäten und b-Werten weiterhin immer einen kostenminimalen Fluß? (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 19.1.2010, **vor** der Vorlesung.