Wintersemester 2009/10
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
9. Übung

1. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Der Wert v eines maximalen s-t-Flusses in (G, u) sei positiv. Betrachten Sie folgende Aussagen für eine Kante $e \in E(G)$ mit $u(e) > 0$:

   (a) Jede Verringerung von $u(e)$ bewirkt eine Verringerung von v.

   (b) Jede Vergrößerung von $u(e)$ bewirkt eine Vergrößerung von v.

   (c) Das Löschen von e verringert v mindestens so stark wie das Löschen jeder anderen Kante.

   (d) e gehört zu einem minimalen s-t-Schnitt.

   (e) e wird von jedem maximalen s-t-Fluss f saturiert (d.h. $f(e) = u(e)$).

   Welche dieser Aussagen sind äquivalent zueinander? Gilt bei nicht äquivalenten Paaren von Aussagen wenigstens eine der beiden Implikationen? (4 Punkte)

2. Man nenne einen s-t-Präfluss f maximal, wenn $\mathrm{ex}_f(t)$ maximal ist.

   (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen Präfluss f einen maximalen Fluss f' mit $f'(e) \leq f(e)$ für alle $e \in E(G)$ gibt.

   (b) Man zeige, wie man in $O(nm)$ Zeit einen maximalen Präfluss in einen maximalen Fluss umwandeln kann. (4 Punkte)

3. Man zeige, dass der GOLDBERG-TARJAN-ALGORITHMUS $O(n^2 m)$ nichtsaturierende Pushes durchführt, unabhängig von der Wahl von v in ③. (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

4. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, f ein s-t-Präfluß in (G, u) und ψ eine Distanzmarkierung bezüglich f mit $\psi(v) \leq 2n$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\psi'(v) := \min\{\mathrm{dist}_{G_f}(v, t), n + \mathrm{dist}_{G_f}(v, s), 2n\}$ für alle $v \in V(G)$.
   Zeigen Sie: ψ' ist eine Distanzmarkierung bezüglich f, und es gilt $\psi(v) \leq \psi'(v)$ für alle $v \in V(G)$. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 15.12.2009, **vor** der Vorlesung.