Wintersemester 2009/10
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
4. Übung

1. Überprüfen Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt sind. Das EMST-Problem sei dabei die Einschränkung des MST-Problems auf Instanzen, in denen der Graph zusammenhängend und die Kantengewichte paarweise verschiedene ganze Zahlen sind.

   (a) Für jede Instanz des EMST-Problems gibt es genau eine optimale Lösung.

   (b) Das MST-Problem mit ganzzahligen Kantengewichten und das EMST-Problem sind äquivalent.

   (c) Der Kontraktions-Algorithmus (s.u.) löst das MST-Problem korrekt.

   (d) Der Kontraktions-Algorithmus löst das EMST-Problem korrekt.

   Der Kontraktions-Algorithmus für das MST-Problem läuft wie folgt ab: Wähle zu jedem Knoten eine billigste inzidente Kante, kontrahiere alle diese Kanten, und iteriere das Verfahren bis nur ein Knoten übrig ist. Das Ergebnis besteht aus allen im Laufe des Verfahrens gewählten Kanten (bzw. deren Urbildern unter der Kontraktionsabbildung). (4 Punkte)

2. Sei T ein Baum mit n Knoten. Ein Knoten $v \in V(T)$ heißt Zentralknoten, wenn die Zusammenhangskomponenten, die nach Herausnahme von v entstehen, jeweils höchstens $\frac{n}{2}$ Knoten enthalten. Zeigen Sie, daß ein Baum stets einen Zentralknoten enthält. Geben Sie außerdem ein möglichst effizientes Verfahren an, um einen solchen Knoten zu finden (mit Laufzeitanalyse). (4 Punkte)

3. Wie kann man in linearer Zeit entscheiden, ob ein gerichteter Graph eine aufspannende Arboreszenz enthält? (4 Punkte)

4. Betrachten Sie das Problem, von 0 bis $k < 2^n$ hochzuzählen, wobei die einzelnen Zwischenstände in einer n-Bit-Zahl abgespeichert werden sollen. Das Ändern eines einzelnen Bits soll eine Zeiteinheit kosten. Zeigen Sie, daß dieses Problem mit amortisierten Kosten von $2k$ Zeiteinheiten gelöst werden kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 10.11.2009, **vor** der Vorlesung.