Wintersemester 2009/10 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

3. Übung

1. Beweisen Sie: Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn $\alpha(H) \geq \frac{|H|}{2}$ für alle Subgraphen $H \subseteq G$ gilt. Dabei ist $\alpha(H)$ die Kardinalität einer größten unabhängigen Menge in H, d.h. einer größten Knotenmenge, deren Elemente paarweise nicht benachbart sind. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

EULERTOUR	
Eingabe:	Ein ungerichteter zusammenhängender Eulerscher Graph $G = (V, E)$
Ausgabe:	Ein Eulerscher Kantenzug in G.

   ① Setze alle Kanten auf UNMARKIERT.
   Wähle $v_0 \in V$ beliebig, und setze $S = v_0$.
   RETURN S = EULER(v_0, E, S).

   EULER (v, E, S)
   WHILE(Es gibt unmarkierte Kante $\{v, w\} \in E$)
   {
   Markiere $\{v, w\}$.
   $S :=$ EULER(w, E, S).
   $S := v, \{v, w\}, S$.
   }
   RETURN S.

   Zeigen Sie, daß der Algorithmus korrekt arbeitet und Laufzeit $O(n + m)$ hat.
   (4 Punkte)

3. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter einfacher Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Zeigen Sie, daß G genau dann Eulersch ist, wenn jede Kante von G auf einer ungeraden Anzahl von Kreisen liegt. (4 Punkte)

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Graph-Scanning-Algorithmus alle Artikulationsknoten eines zusammenhängenden ungerichteten Graphen G. (4 Punkte)
   Anleitung: Führen Sie eine Tiefensuche durch, in der Sie die Knoten in der Reihenfolge ihrer ersten Betrachtung numerieren. Außerdem merken Sie sich bei jedem Knoten v mit Nummer i die kleinste Nummer eines Knotens, den man von v aus über einen Weg in G erreicht, dessen innere Knoten alle eine größere Nummer als i haben und der, wenn er überhaupt Kanten enthält, mindestens eine Kante hat, die nicht im DFS-Baum enthalten ist. Zeigen Sie, daß v kein Artikulationsknoten ist, wenn diese Nummer für jeden Nachfolger von v im DFS-Baum kleiner als i ist.

Abgabe: Dienstag, den 3.11.2009, **vor** der Vorlesung.