Wintersemester 2008/09 — Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik

Prof. Dr. S. Hougardy — Universität Bonn
Dr. U. Brenner
C. Mohr

# Algorithmische Mathematik I
## 11. Übung

1. Vektornormen
   Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$ definiere folgende Normen:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

   (a) Zeigen Sie: $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

   (b) Skizzieren Sie für $p \in \{1, 2, \infty\}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_p = 1\}$.

   (c) Bestimmen Sie optimale Konstanten $m_i$ und $M_i$ für $i = 1, 2, 3$, sodass die folgenden Ungleichungen für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten

$$\begin{array}{rcccl} m_1\|x\|_\infty & \leq & \|x\|_1 & \leq & M_1\|x\|_\infty \\ m_2\|x\|_\infty & \leq & \|x\|_2 & \leq & M_2\|x\|_\infty \\ m_3\|x\|_2 & \leq & \|x\|_1 & \leq & M_3\|x\|_2 \end{array}$$

(10 Punkte)

2. Matrixnormen
   Seien $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reelle quadratische Matrizen.

   (a) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm $\|A\| := \sup_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ für eine beliebige Vektornorm $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist, d.h. es gilt $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

   (b) Sei nun $\|A\| < 1$ und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass dann $(I + A)^{-1}$ existiert und die Abschätzung $\|(I + A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$ gilt.

   (c) Gegeben sei die Frobenius-Norm $\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass es für $n \geq 2$ keine Vektornorm des $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $\|C\|_F = \sup_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Cx\|}{\|x\|}$ für alle $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.

   (d) Zeigen Sie die Submultiplikativität der in (c) definierten Frobenius-Norm, d.h. $\|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$.

(10 Punkte)

3. Eindeutigkeit der $LR$-Zerlegung

   (a) Zeigen Sie: Die Menge der regulären oberen sowie die Menge der regulären normierten unteren Dreiecksmatrizen bilden jeweils eine Gruppe.

   (b) Zeigen Sie: Besitzt eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $LR$-Zerlegung, so ist diese eindeutig. (10 Punkte)

4. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

   Zeigen Sie: $A$ ist invertierbar und besitzt eine $LR$-Zerlegung. (10 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 21.01.2009, **vor** der Vorlesung.