Wintersemester 2008/09 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner
C. Mohr

Algorithmische Mathematik I
4. Übung

1. Vermeidung von Auslöschung
   Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird:

   (a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ für $x \gg 1$ (d.h. x ist wesentlich größer als 1)

   (b) $\sqrt[3]{1+x} - 1$ für $x \approx 0$

   (c) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$

   (d) $\dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ für $x \gg 1$ (8 Punkte)

2. Varianzberechnung
   Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ von Stichproben bezeichne
   $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
   den Mittelwert der Stichprobe. Zur Berechnung der Varianz der Stichprobe stehen die Formeln
   $$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \quad \text{und} \quad s_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \bar{x}^2)$$
   zur Verfügung.

   (a) Zeigen Sie, dass $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2$ gilt.

   (b) Welche der drei Formeln ist im Hinblick auf die numerische Stabilität die günstigste? (6 Punkte)

3. Berechnen Sie die Konditionszahl der folgenden Funktionen und geben Sie an, wo die Funktionsauswertung qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist.

   (a) $f(x) = \arcsin(x), \quad x \in [-1, 1]$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$

(c) $f(x) = y^x = e^{x \ln y}$ für ein festes $y > 0$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ (6 Punkte)

4. Wir wollen nun eine Fehleranalyse bei der Auswertung von Polynomen $y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ durchführen. Bei der Rückwärtsanalyse ist das gestörte Resultat der Auswertung $\tilde{y}$ das Ergebnis einer exakten Rechnung für gestörte Koeffizienten $\tilde{c}_i$, also $\tilde{y} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \ldots + \tilde{c}_n x^n$. Im Folgenden sei der relative Fehler für alle Operationen konstant gleich ξ.

   (a) Geben Sie die Koeffizienten $\tilde{c}_i$ an, für den Fall, dass das Polynom beginnend mit der niedrigsten Potenz ausgewertet wird. Linearisieren Sie dabei rechtzeitig, also zum Beispiel ist $(1+\xi)(1+\xi) \approx 1 + 2\xi$.

   (b) Beginnen Sie nun mit der höchsten Potenz. Welche ist die bessere Strategie?

   (c) Hohe Potenzen von x lassen sich (wenn man nur die arithmetischen Grundoperationen zur Verfügung hat) schneller rekursiv berechnen. Sei z.B. $x_2 = x \cdot x$ und $x_4 = x_2 \cdot x_2$, dann benötigt man zur Berechnung von $x^{11} = ((x_4 \cdot x_4) \cdot x_2) \cdot x$ nur fünf Multiplikationen statt zehn. Wie ändern sich nun qualitativ die Resultate der Aufgaben (a) und (b)?

   (d) Sei nun $\xi = 10^{-8}$. Schätzen Sie den relativen Fehler im höchsten Koeffizienten c_n und im Gesamtergebnis y für die obigen Verfahren ab. (10 Punkte)

5. Es sei $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Gleitkommarealisierung zur Lösung eines Problems $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir definieren den **Stabilitätsindikator der Vorwärtsanalyse** als die kleinste Zahl $\sigma_{\widetilde{f}} \geq 0$, sodass

$$\frac{|\widetilde{f}(\widetilde{x}) - f(\widetilde{x})|}{|f(\widetilde{x})|} \leq \sigma_{\widetilde{f}} \cdot \kappa_f \cdot \text{eps},$$

   wobei eps die Maschinengenauigkeit sei. Dabei ist κ_f die Konditionszahl von f in $\widetilde{x}$. Zeigen Sie:

   (a) Es sei $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. Dann gilt für die Gleitkommarealisierung $\circledast$

$$\sigma_{\circledast} \cdot \kappa_* \leq 1.$$

   (b) Für einen zusammengesetzten Algorithmus $\widetilde{f} = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$ zur Lösung eines Problems $f = h \circ g$ gilt

$$\sigma_{\widetilde{f}} \cdot \kappa_f = \sigma_{\widetilde{h}} \cdot \kappa_h + \sigma_{\widetilde{g}} \cdot \kappa_g \cdot \kappa_h$$

   (c) Interpretieren Sie die Resultate aus (a) und (b) bezüglich unvermeidlicher Auslöschung. (10 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 12.11.2008, **vor** der Vorlesung.