

# Algorithmische Mathematik I

## 3. Übung

### 1. Festkommazahlen

Ein – recht primitiver – Rechner stellt reelle Zahlen im Festkommaformat mit einem Byte dar. Dabei werden ein Vorzeichen-Bit, vier Bit vor dem Komma und drei Bit nach dem Komma verwendet. Somit haben die Zahlen, die der Rechner darstellen kann, die Form

$$z = (-1)^s \sum_{i=1}^7 d_i \cdot 2^{i-4}.$$

- Welche Darstellung haben die Zahlen 5.875 und  $-3.125$ ?
- Wie viele verschiedene Zahlen können im obigen Format dargestellt werden?
- Geben Sie die maximale und minimale darstellbare Zahl  $z_{\min}$  und  $z_{\max}$  an.
- Skizzieren (oder plotten) Sie alle darstellbaren Zahlen auf einer Zahlengeraden.
- Nicht darstellbare Zahlen im Bereich  $[z_{\min}, z_{\max}]$  werden auf die nächstgelegene darstellbare Zahl gerundet. Geben Sie den absoluten und den relativen Rundungsfehler bei der Darstellung der Zahl  $\frac{1}{3}$  an.
- Bestimmen Sie den maximalen absoluten und relativen Rundungsfehler für reelle Zahlen im Bereich  $[z_{\min}, z_{\max}]$ .

Begründen Sie Ihre Antworten.

(10 Punkte)

### 2. Gleitkommazahlen

Der beschriebene Ein-Byte-Rechner wird nun mit Gleitkomma-Arithmetik ausgestattet. Bei der (normalisierten) Zahlendarstellung werden ein Bit für das Vorzeichen, vier Bit für die Mantisse und drei Bit für den Exponenten (mit denen die Exponenten  $-2, -1, 0, 1, 2$  und  $3$  kodiert werden können) verwendet. Die führende Eins in der Mantisse wird nicht abgespeichert.

- Welche Darstellung haben die Zahlen 6.5 und  $-0.375$ ?
- Wie viele Zahlen können in diesem Gleitkomma-Format dargestellt werden?

- (c) Geben Sie die maximale und minimale darstellbare Zahl  $z_{\min}$  und  $z_{\max}$  sowie die betragsmäßig kleinst darstellbare Zahl ungleich Null an.
- (d) Skizzieren (oder plotten) Sie alle darstellbaren Zahlen auf einer Zahlengeraden.
- (e) Auch hier werden nicht darstellbare Zahlen auf die nächstgelegene darstellbare Zahl gerundet. Bestimmen Sie den maximalen absoluten und relativen Rundungsfehler für reelle Zahlen im Bereich  $[z_{\min}, z_{\max}]$ .

Begründen Sie Ihre Antworten. (10 Punkte)

- 3. Ermitteln Sie mithilfe eines kurzen Programms die Maschinengenauigkeit des von Ihnen benutzten Rechners für den Typ `double`. (8 Punkte)
- 4. Mithilfe eines Computerprogramms wurden die folgenden Rechnungen durchgeführt:

	Eingabezeile	Ausgabewert
(a)	$(1+1e-16)-1$	0
(b)	$(1+2e-16)-1$	2.2204e-16
(c)	$(1-1e-16)-1$	-1.1102e-16
(d)	$1+(1e-16-1)$	1.1102e-16

Für die maschineninterne Darstellung der Gleitkommazahlen wird dabei `double` precision nach dem IEEE-Standard 754 verwendet. Erklären Sie die obigen Resultate. Beachten Sie dabei, wie der Computer die Berechnungen intern ausführt.

(6 Punkte)

- 5.  $b$ -adische Darstellung reeller Zahlen

- (a) Bestimmen Sie die Darstellung der Dezimalzahl 0.7 zur Basis  $b = 2$ .
- (b) Welcher Dezimalzahl entspricht die Binärzahl  $(0.10\bar{1})_2$ ? Geben Sie die Darstellung dieser Zahl zur Basis  $b = 5$  an.
- (c) Ermitteln Sie die ersten 6 Nachkommastellen von  $\pi$  bezüglich der Basis  $b = 7$ .

(6 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 05.11.2008, **vor** der Vorlesung.