Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. Eine Firma schätzt, dass sie in Kalenderwoche i bis zu p_i Autos produzieren kann und bis zu v_i Autos verkaufen kann ($i = 1, \ldots, 52$). Produzierte Autos stehen ab Beginn der folgenden Kalenderwoche zum Verkauf bereit. Ein in Woche i produziertes und in Woche $j > i$ verkauftes Auto belegt in den Wochen $i+1, \ldots, j$ Lagerraum. Die Firma kann immer nur höchstens l Autos lagern. In der ersten Kalenderwoche wird nicht produziert, d.h. $p_1 = 0$, es stehen aber aus der Vorjahresproduktion noch p_0 produzierte Autos im Lager.

   (a) Sei $t \in \mathbb{N}$. Die Firma möchte feststellen, wieviele Autos sie bis zur t-ten Kalenderwoche maximal verkaufen kann.

   (b) Außerdem möchte sie wissen, ob sich diese Zahl verringert, wenn sie die Produktion auch in der zweiten Kalenderwoche ruhen lässt.

   (c) Bei Produktionskosten von P und Verkaufserlösen von V je Auto, sowie Lagerkosten von L je Auto und Woche stellt sich die Frage, wann wieviele Autos produziert werden sollen, um den Gewinn zu maximieren. Ignorieren Sie dabei Zinseffekte.

   Können Sie der Firma helfen? (4 Punkte)

2. Gegeben seien eine endliche Menge Q von Bauteilen und eine endliche Menge R von Regionen. Jedem Bauteil $q \in Q$ sei eine Größe $\beta(q) \in \mathbb{N}$ und jeder Region $r \in R$ eine Kapazität $\kappa(r) \in \mathbb{R}_+$ zugeordnet. Ferner gebe es Kosten $c : Q \times R \to \mathbb{R}_+$. Es gelte

$$\sum_{q \in Q} \beta(q) \leq \sum_{r \in R} \kappa(r).$$

   Gesucht ist $\gamma : Q \times R \to [0, 1]$ mit:

   - $\sum_{r \in R} \gamma(q, r) = 1 \quad \forall q \in Q$
   - $\sum_{q \in Q} \gamma(q, r) \cdot \beta(q) \leq \kappa(r) \quad \forall\, r \in R$

   und $\sum_{q \in Q} \sum_{r \in R} c(q, r) \cdot \gamma(q, r)$ minimal. Zeigen Sie, dass sich das Problem als Min-Cost-Flow-Problem formulieren lässt. (4 Punkte)

   Bemerkung: Dieses Problem tritt im Chip-Design auf. Eigentlich sucht man eine ganzzahlige Zuordnung, d.h. $\gamma : Q \times R \to \{0, 1\}$. Vergleiche Aufgabe 3.

3. Zeigen Sie, dass es für das Problem aus Aufgabe 2 eine Optimallösung γ gibt, so daß es höchstens $|R|-1$ Bauteile $q \in Q$ gibt, für die gilt:

$$|\{r : \gamma(q,r) > 0\}| > 1.$$

(4 Punkte)

4. Man beschreibe eine Turingmaschine mit Alphabet $\{0, 1, \#\}$, die zwei binäre Strings vergleicht: Der Input bestehe aus einem String $a\#b$ mit $a, b \in \{0,1\}^*$, und der Output sei 1 für $a = b$ und 0 für $a \neq b$. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 13.1.2009, **vor** der Vorlesung.