Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Man zeige, dass der Push-Relabel-Algorithmus $O(n^2m)$ nichtsaturierende Pushes durchführt, unabhängig von der Wahl von v in ③ . (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

2. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, f ein s-t-Präfluss in (G, u) und ψ eine Distanzmarkierung bezüglich f mit $\psi(v) \leq 2n$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\psi'(v) := \min\{\mathrm{dist}_{G_f}(v,t), n + \mathrm{dist}_{G_f}(v,s), 2n\}$ für alle $v \in V(G)$.
   Zeigen Sie: ψ' ist eine Distanzmarkierung bezüglich f, und es gilt $\psi(v) \leq \psi'(v)$ für alle $v \in V(G)$. (4 Punkte)

3. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, $n := |V(G)|$ und $m := |E(G)|$. Sei $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Nummerierung der Knoten mit $v_1 = s$ und $u(\delta^+(\{v_1, \dots, v_i\}) \cap \delta^-(v_{i+1})) \geq u(\delta^+(\{v_1, \dots, v_i\}) \cap \delta^-(v_j))$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. (Dies ist eine gerichtete Version der MA-Reihenfolge; eine solche kann wie in Proposition 8.37 in $O(m+n \log n)$ Zeit berechnet werden.) Sei $v_k = t$ und $\alpha := \min\{u(\delta^+(\{v_1, \dots, v_i\}) \cap \delta^-(v_{i+1})) : i = 1, \dots, k-1\}$.

   (a) Zeigen Sie, wie man mit Hilfe dieser Nummerierung in linearer Zeit einen s-t-Fluss mit Wert α berechnen kann. (Hinweis: bearbeiten Sie die Knoten in umgekehrter Reihenfolge, bei t beginnend.)

   (b) Zeigen Sie, dass $(n-1)\alpha$ mindestens der Wert eines maximalen s-t-Flusses in (G, u) ist. (4 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass man das Maximum-Flow-Problem als einen Spezialfall des Minimum-Cost-Flow-Problems auffassen kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 16.12.2008, **vor** der Vorlesung.