Wintersemester 2008/09 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
2. Übung

1. An einem Tennisturnier nehmen genau n Spieler teil. Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen. Es gibt keine Unentschieden. Am Ende soll eine Rangliste der Spieler aufgestellt werden, d.h. eine Nummerierung mit $s_1, \ldots, s_n$, und zwar so, dass s_i gegen s_{i+1} gewonnen hat für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

   (a) Man zeige, dass dies immer möglich ist.

   (b) Man finde einen Algorithmus, der die Ergebnisliste als Eingabe bekommt und eine solche Rangliste in $O(n^k)$ Rechenschritten bestimmt, wobei k eine Konstante sei. Wie klein kann k gewählt werden? (4 Punkte)

2. Man beweise: Jeder einfache ungerichtete Graph mit mindestens zwei Knoten enthält zwei Knoten desselben Grades. Man zeige ferner, dass jeder Baum mit mehr als einem Knoten mindestens zwei Blätter enthält. (4 Punkte)

3. Seien (V, F_1) und (V, F_2) zwei Wälder mit $|F_1| < |F_2|$. Man beweise, dass es eine Kante $e \in F_2 \setminus F_1$ gibt, so dass $(V, F_1 \cup \{e\})$ ein Wald ist. (4 Punkte)

4. Sei G ein gerichteter Graph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) G ist ein Branching.

   (b) G ist azyklisch (d.h. enthält keinen Kreis), und es gilt $|\delta^-(v)| \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.

   (c) G ist Teilgraph einer Arboreszenz.

   (d) Die Zusammenhangskomponenten von G sind Arboreszenzen. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 28.10.2008, **vor** der Vorlesung.