Wintersemester 2008/09 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
1. Übung

1. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph und $v, w \in V(G)$ mit $v \neq w$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Es gibt eine in v beginnende und in w endende Kantenfolge in G.

   (b) Es gibt einen in v beginnenden und in w endenden Spaziergang in G.

   (c) Es gibt einen Weg von v nach w in G. (4 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph und $F \subseteq E(G)$ die Kantenmenge eines geschlossenen Spaziergangs in G.

   (a) Zeigen Sie, dass es dann eine Menge von Kreisen mit paarweise disjunkten Kantenmengen gibt, so dass die Vereinigung ihrer Kantenmengen gleich F ist.

   (b) Ist diese Menge – oder wenigstens ihre Mächtigkeit – stets eindeutig bestimmt?

   (c) Wie kann man die Aussage in (a) anpassen auf den Fall, dass F die Kantenmenge eines nicht geschlossenen Spaziergangs ist? (4 Punkte)

3. Für natürliche Zahlen n und m seien $K_n := (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\})$ (der *vollständige Graph* auf n Knoten) und $K_{n,m} := (\{1, \ldots, n+m\}, \{\{i, j\} : 1 \leq i \leq n < j \leq n+m\})$. Für welche natürlichen Zahlen n und m enthält K_n bzw. $K_{n,m}$

   (a) einen Eulerschen Spaziergang?

   (b) einen Hamiltonkreis? (4 Punkte)

4. (a) Beweisen Sie: Ein zusammenhängender ungerichteter Graph enthält genau dann einen Spaziergang, in dem sämtliche Kanten vorkommen, wenn weniger als vier Knoten ungeraden Grad haben.

   (b) Formulieren Sie eine ähnlich einfach überprüfbare notwendige und hinreichende Bedingung für zusammenhängende gerichtete Graphen, und beweisen Sie die entsprechende Aussage. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 21.10.2008, **vor** der Vorlesung.