Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 23. November, vor der Vorlesung

Übungsblatt 5

Sei im folgenden $P = \{x|Ax \leq b\}$ ein nicht leerer Polyeder mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Wir führen folgende Notation ein:

- $A^= x \leq b^=$ sei das System der impliziten Gleichungen von $Ax \leq b$ und
- $A^+ x \leq b^+$ das System aller anderen Ungleichungen von $Ax \leq b$.

Aufgabe 29:
Zeigen Sie, dass ein $x \in P$ existiert mit $A^= x = b^=, A^+ x < b^+$.

(2 Punkte)

Aufgabe 30:
Wir betrachten nun den charakteristischen Kegel char.cone(P) von P. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\text{char.cone}(P) = \{y|Ay \leq 0\}$.

b) Es gilt $y \in \text{char.cone}(P)$ genau dann, wenn ein $x \in P$ existiert mit $x + \lambda y \in P$ für alle $\lambda \geq 0$.

c) $P + \text{char.cone}(P) = P$.

d) P ist genau dann beschränkt, wenn $\text{char.cone}(P) = \{0\}$.

e) Gilt $P = Q + C$ mit Q Polytop und C polyhedraler Kegel, dann ist $C = \text{char.cone}(P)$.

(6 Punkte)

A.31 - A.33 →

Aufgabe 31:
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\text{lin.space}(P) = \{y | Ay = 0\}$.

b) P kann eindeutig dargestellt werden als $P = H + Q$, wobei H ein linearer Raum und Q ein nicht-leerer Polyeder mit $\dim(\text{lin.space}(Q)) = 0$ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 32:
Beweisen Sie die folgenden Ausssagen:

a) $\text{aff}(P) = \{x | A^{=}x = b^{=}\} = \{x | A^{=}x \leq b^{=}\}$.

b) Die Dimension von P ist gleich n minus dem Rang der Matrix $A^{=}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 33:
Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Jede Seitenfläche von P, außer P selber, ist der Schnitt von Facetten von P.

b) P hat genau dann keine Seitenfläche ungleich P, wenn P ein affiner Raum ist.

c) Jede minimale Seitenfläche von P hat die Form $\text{lin.space}(P) + x$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$.

(6 Punkte)