Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 25. Januar 2005, vor der Vorlesung

Übungsblatt 11

Definition:
Wie in der Vorlesung sei definiert:

- $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = n\}$
- $e^T = (1, \ldots, 1)$
- $B^\star(e, \varrho) = \{x \mid e^T x = n,\ \|x - e\| \leq \varrho\}$
- $R := \min\{\varrho \,|\, B^\star(e, \varrho) \supseteq \Sigma\}$
- $r := \max\{\varrho \,|\, B^\star(e, \varrho) \subseteq \Sigma\}$

Aufgabe 53:
Zeigen Sie, dass $R = \sqrt{n(n-1)}$ und $r = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 54:
Zeigen Sie, dass T_k jedes Stratum in sich selbst überführt, also $T_k(\Sigma_{\mathrm{I}}) = \Sigma_{\mathrm{I}}$ für alle $\mathrm{I} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\Sigma_{\mathrm{I}} = \{x \in \Sigma \,|\, x_i = 0\, \forall i \in \mathrm{I},\ x_i > 0\, \forall i \notin \mathrm{I}\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 55:
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösung die Orthogonalprojektion von e_1 auf $\{x \mid Bx = 0\}$ ist.

(6 Punkte)

A. 56, 57 →

Aufgabe 56:
Seine $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ eine Optimallösung von

$$\min \left\{ x_1 x_2 x_3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = \lambda, \sum_{i+1}^{3} x_i^2 = \mu \right\}$$

und ist $\overline{x}_1 \leq \overline{x}_2 \leq \overline{x}_3$, dann gilt $\overline{x}_2 = \overline{x}_3$.

b) Ist $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ eine Optimallösung von

$$\min \left\{ x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda, \sum_{i+1}^{n} x_i^2 = \mu \right\}$$

und ist $\overline{x}_1 \leq \overline{x}_2 \leq \ldots \leq \overline{x}_n$, dann gilt $\overline{x}_2 = \overline{x}_3 = \ldots = \overline{x}_n$.

c) Sei $0 < \alpha < 1$. Die Funktion $h(x) := x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ nimmt in der Menge $B^\star(e, \alpha r)$ (wie oben definiert) im Punkt $e + \alpha(-1, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1})$ ihr Minimum an.

(6 Punkte)

Aufgabe 57:
Betrachten Sie das folgende LP:

$$\begin{array}{rrrrcl} \min & x_2 & & & & \\ \text{s. t.} & x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Skizzieren Sie den für das LP zulässigen Bereich.

b) Überprüfen Sie die Voraussetzungen für den Algorithmus von Karmarkar.

c) Führen Sie für dieses LP den ersten Schritt von Karmarkars Algorithmus für $\alpha = \frac{2}{9}$ aus.

(6 Punkte)