Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 19. Oktober, vor der Vorlesung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Zeichnen Sie den Zulässigkeitsbereich des folgenden Optimierungsproblems. Geben Sie den Optimalpunkt und dessen Zielfunktionswert an.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s. t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die reellen Zahlen r,s und t, damit das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s. t.} & rx_1 & + & sx_2 & \leq & t \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) eine Optimallösung besitzt;

b) unzulässig ist;

c) unbeschränkt ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen konvex sind:

a) $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 2\}$

c) $\{(x_1, x_2) : x_2 - x_1^2 = 0\}$

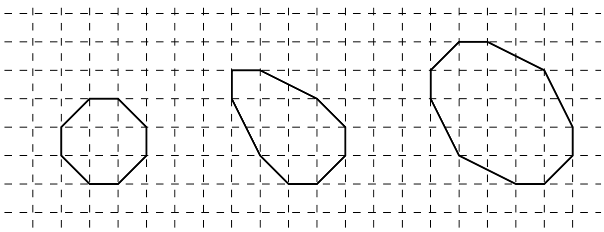
d) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \geq x_1^2, x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\}$

e) $\{(x_1, x_2) : x_1 = 1, |x_2| \leq 4\}$

f) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = |x_2|, x_1 \leq 4\}$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $f_2(n) \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, so dass das konvexe $n-$eck $P_2(n)$ in einem $f_2(n) \times f_2(n)$ Gitter repräsentiert werden kann (d.h. alle Ecken von $P_2(n)$ sind in $\{0, 1, \ldots, f_2(n)\}^2$). Zum Beispiel gilt $f_2(3) = f_2(4) = 1$, $f_2(5) = f_2(6) = 2$, $f_2(7) = f_2(8) = 3$, $f_2(9) = 3$ und $f_2(10) = 5$ (siehe Abbildung).



Zeigen Sie, dass $f_2(n) \leq cn^2$ für eine Konstante $c > 0$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie zu $A = \{(t, t), (t, -t) | 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, so dass $A + B$ konvex ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 6:
Zeigen Sie:
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow$ $\text{Inn}(M)$ konvex.

(6 Punkte)