Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 4. November, vor der Vorlesung

Übungsblatt 3

Aufgabe 11: Zeigen Sie:
Genau eines der folgenden Systeme hat eine Lösung:

1. $\{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$
2. $\{y \mid y^T A \geq 0,\ y \geq 0,\ y^T b < 0\}$

(4 Punkte)

Aufgabe 12: Zeigen Sie:
Genau eine der folgenden Mengen ist nicht leer.

1. $\{x \mid Ax \geq 0,\ Ax \neq 0\}$
2. $\{y \mid y^T A = 0,\ y > 0\}$

(4 Punkte)

Aufgabe 13: Zeigen Sie:
Genau eine der folgenden Mengen ist nicht leer

1. $\{x \mid Ax = c\}$
2. $\{y \mid A^T y = 0,\ c^T y = 1\}$

(4 Punkte)

Aufgabe 14: Entscheiden Sie mit Hilfe der Fourier-Motzkin-Elimination, ob die folgenden linearen Ungleichungssyteme $A_i\, x \leq b_i,\ i \in \{1, 2\}$ eine Lösung besitzen. Wenn ja, dann geben Sie eine Lösung x an. Wenn nein, dann geben Sie ein y an, mit $y^T A_i = 0,\ y \geq 0,\ y^T b_i < 0$.

1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\max\left\{c^T x \mid x \in P\right\} \text{ mit } P = \{x \mid Ax \leq b\} \quad (P)$$

Man definiert das **duale** Problem von (P) als:

$$\max\left\{b^T y \mid y \in D\right\} \text{ mit } D = \{y \mid y^T A = c^T,\ y \geq 0\}$$

Das ursprüngliche Problem (P) wird dann auch als '**primales**' Problem bezeichnet.

Aufgabe 15: Beweisen Sie:
Das Duale des Dualen ist wieder das Primale.

(10 Punkte)