Lineare und Ganzzahlige Optimierung
11. Übung

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\{s_1, \ldots, s_{37}\} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für Variablen x, y folgende Nebenbedingungen in einem MILP kodiert werden können (durch Hinzufügen weiterer Variablen):
   (a) ($x \geq a$ oder $y \geq b$) und $x, y \geq 0$.
   (b) $x \in \{s_1, \ldots, s_{37}\}$. (1+1 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass in der Ungleichung
$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \leq \min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^m\}$$
im Allgemeinen keine Gleichheit gilt, auch wenn die beiden zugehörigen Optimierungsprobleme zulässig und beschränkt sind. (2 Punkte)

3. (a) Zeigen Sie, dass ein polyedrischer Kegel genau dann rational ist, wenn er von einer endlichen Anzahl von ganzzahligen Vektoren erzeugt wird. Folgern Sie, dass $C_I = C$ für rationale Kegel C gilt.
   (b) Es seien $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Polyeder. Zeigen Sie, dass dann $P_I + Q_I \subseteq (P + Q)_I$ gilt. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $P_I + Q_I \neq (P + Q)_I$ gilt. (3+2 Punkte)

4. Geben Sie je ein Beispiel an für
   (a) ein volldimensionales unbeschränktes rationales Polyeder P, für das P_I leer ist.
   (b) ein unbeschränktes Polyeder P, für das P_I nicht-leer und beschränkt ist.
   (c) ein Polyeder P, für das $P_I \neq \emptyset$ nicht abgeschlossen ist.
   (d) ein zulässiges und beschränkte ganzzahliges lineares Programm ohne Optimallösung. (1+2+2+2 Punkte)

5. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^{k+l} : Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder (d.h. $A \in \mathbb{Q}^{m \times (k+l)}$, $b \in \mathbb{Q}^m$). Zeigen Sie, dass $\operatorname{conv}(P \cap (\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^l))$ ebenfalls ein rationales Polyeder ist. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 30. Juni, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.