Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
9. Übung

1. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & \frac{c^t x+d}{f^t x+g} \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & \|x\|_\infty \le R \end{array}$$

mit $c, f \in \mathbb{Q}^n$, $d, g, R \in \mathbb{Q}$, $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Sie können annehmen, dass $f^t x + g > 0$ und $c^t x + d > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty \le R$ gilt und dass es eine zulässige Lösung gibt. Zeigen Sie, dass es einen Polynomzeit-Algorithmus gibt, der zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine zulässige Lösung x^* mit $\frac{c^t x^*+d}{f^t x^*+g} \le \mathrm{OPT}(1+\epsilon)$ berechnet, wobei OPT der Wert einer Optimallösung sei. (5 Punkte)

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine "r-R-sandwiched" konvexe Menge, $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta = \sup\{c^t x \mid x \in K\}$ und $0 < \epsilon < \delta$. Außerdem sei $U = \{x \in K \mid c^t x \ge \delta - \epsilon\}$. Beweisen Sie, dass

$$\text{volume}\,(U) \ge \left(\frac{\epsilon}{2\|c\|R|}\right)^{n-1} r^{n-1} \frac{1}{n^n} \frac{\epsilon}{2\|c\|} \frac{1}{n}.$$

(5 Punkte)

3. Bestimmen Sie möglichst kleine Zahlen k und l, sodass eine gegebenes zulässiges und beschränktes LP $\max\{c^t x \mid Ax \le b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $c \in \mathbb{Q}^n$ mit Hilfe des ELLIPSOID-ALGORITHMUS in Zeit $O((m+n)^k(\text{size}(A) + \text{size}(b) + \text{size}(c))^l)$ gelöst werden kann. (6 Punkte)

4. Betrachten Sie das folgende primal-duale Paar von linearen Programmen: $\max\{c^t x \mid Ax+s = b, s \ge 0\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \ge 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Wir nehmen an, dass beide LPs zulässig sind. Nach dem starken komplementären Schlupf gibt es eine Aufteilung $\{1, \dots, m\} = B \dot\cup N$, so dass es für $i \in B$ eine optimale Duallösung y^* mit $y_i^* > 0$ und für $i \in N$ eine optimale Primallösung x^*, s^* mit $s_i^* > 0$ gibt. Formulieren Sie ein lineares Programm, an dessen Optimallösung man direkt die Mengen B und N ablesen kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 14. Juni, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.