Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
8. Übung

1. Es sei G ein einfacher gerichteter Graph. Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_{e=\{v,w\}\in E(G)} x_{vw} & & & \\
\text{s.d.} & \sum_{w\in S} x_{vw} & \geq & \lceil \frac{1}{4}|S|^2 + \frac{1}{2}|S| \rceil & \text{für } v \in V(G), S \subseteq V(G)\setminus\{v\} \\
& x_{uw} & \leq & x_{uv} + x_{vw} & \text{für } u,v,w \in V(G) \\
& x_{vw} & \geq & 0 & \text{für } v \in V(G) \\
& x_{vv} & = & 0 & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

   (a) Zeigen Sie, dass dies eine Relaxierung des folgenden Problems ist: Finde Abstände x_{vw} für die Knoten von G, so dass $\sum_{e=\{v,w\}\in E(G)} x_{vw}$ minimiert wird, unter der Nebenbedingung dass es eine Sortierung $\{v_1,\ldots,v_{|V(G)|}\} = V(G)$ der Knoten gibt mit $x_{v_iv_j} = |i-j|$ für $i,j \in \{1,\ldots,|V(G)|\}$.

   (b) Zeigen Sie, dass es ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für den Lösungsraum dieses LPs gibt. (2+3 Punkte)

2. Ein semidefinites Programm ist ein Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rll}
\min & C \star X & \\
& A_i \star X \leq b_i & \forall i = 1,\ldots,m \\
& X \succeq 0 & \\
& X \in \mathbb{R}^{n\times n} &
\end{array}
$$

   wobei $C, A_1, \ldots, A_n$ Matrizen sind, $A \star X := \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_{ij}$, und $X \succeq 0$ heißt, dass X symmetrisch und positiv semidefinit ist.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X \succeq 0\}$ ein abgeschlossener Kegel ist.

   (b) Geben Sie ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für die Lösungsmenge an. (Sie können annehmen, dass Sie grundlegende arithmetische Operationen auf reellen Zahlen, inklusive Wurzelziehen, exakt und in konstanter Zeit durchführen können.) (3+3 Punkte)

3. Es sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der zu jedem zulässigen und beschränkten LP $\max\{c^tx \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ (mit $c \in \mathbb{Q}^n$, $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$) in polynomieller Laufzeit eine Optimallösung findet. Zeigen Sie, dass es dann auch einen polynomiellen Algorithmus gibt, der, falls außerdem $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ spitz ist, stets eine Optimallösung findet, die eine Ecke von P ist. (4 Punkte)

4. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$ für Zahlen $0 < r \leq \frac{R}{2}$. Nehmen Sie an, dass ein Polynomzeit-Orakel gegeben ist, das zu jeder linearen Zielfunktion eine optimale Lösung in K berechnet. Zeigen Sie, dass es dann ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^tx \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$ gibt. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 2. Juni, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.