Lineare und Ganzzahlige Optimierung
6. Übung

1. Betrachten Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\max & 2.3x_1 & + & 2.15x_2 & - & 13.55x_3 & - & 0.4x_4 & & & & & & \\
\text{s.d.} & 0.4x_1 & + & 0.2x_2 & - & 1.4x_3 & - & 0.2x_4 & + & x_5 & & & = & 0 \\
& -7.8x_1 & - & 1.4x_2 & + & 7.8x_3 & + & 0.4x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Verwenden Sie $\{5, 6\}$ als Startbasis für den Simplex-Algorithmus. Als Pivotregeln wählen Sie die neuen Basis-Index α stets so, dass r_α maximiert wird. Der Index β, welche die Basis verlässt, sei so gewählt, dass sie (unter allen Kandidaten) den Wert $q_{\beta\alpha}$ minimiert. Zeigen Sie, dass der Simplex-Algorithmus unter diesen Umständen nicht terminiert. (5 Punkte)

2. Betrachten Sie ein LP in geeigneter Form für das Simplex-Verfahren, also $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, so dass A vollen Zeilenrang hat und $Ax = b$ lösbar ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Eine Variable, die beim Simplex gerade in die Basis gekommen ist, kann die Basis in der nächsten Iteration wieder verlassen.

   (b) Eine Variable, die beim Simplex gerade die Basis verlassen hat, kann in der nächsten Iteration wieder in die Basis kommen.

   (c) Ist x eine eindeutige optimale Basislösung und $\tilde{x}$ eine zweitbeste Basislösung mit echt kleineren Kosten, so erhalt man x aus $\tilde{x}$ durch Austausch einer Basisvariablen.

   (d) Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP beschränkt ist, so ist eine optimale Lösung eindeutig. (1+1+1+1 Punkte)

3. Betrachten Sie ein lineares Programm $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Es sei B eine zulässige Basis mit Basislösung x^* und reduzierten-Kosten-Vektor $r \leq 0$ (also ist x^* eine Optimallösung). Sei $I = \{j \in N \mid r_j = 0\}$.

   (a) Beweisen Sie, dass x^* die einzige Optimallösung ist, falls $I = \emptyset$.

   (b) Nehmen Sie an, dass $I \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass in dem Fall x^* genau dann die einzige Optimallösung ist, wenn das folgende lineare Programm eine Optimallösung mit Wert 0 hat:

$$\begin{array}{rrcll}
\max & \sum_{i \in I} x_i & & & \\
\text{s.t.} & Ax & = & b & \\
& x_i & = & 0 & \text{für } i \in N \setminus I \\
& x_i & \geq & 0 & \text{für } i \in B \cup I
\end{array}$$

(2+3 Punkte)

b.w.

4. Betrachten Sie das LP $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = m$ und $Ax = b$ zulässig. Sei B eine dual zulässige Basis, also eine Basis, sodass $\tilde{y} = (A_B^t)^{-1} c_B$ eine zulässige Lösung des dualen LPs ist.

   (a) Zeigen Sie, dass der Eintrag z_0 im Simplex-Tableau $T(B)$ die Kosten der dualen Lösung angibt.

   (b) Sei $\beta \in B$ mit $p_\beta < 0$ und $\alpha \in N$ mit $q_{\beta\alpha} > 0$, sodass $\frac{r_\alpha}{q_{\beta\alpha}} \geq \frac{r_j}{q_{\beta j}}$ für alle $j \in N$ mit $q_{\beta j} > 0$. Zeigen Sie, dass $(B \setminus \{\beta\}) \cup \{\alpha\}$ eine dual zulässige Basis ist. Zeigen Sie außerdem, dass der Wert der dualen Lösung sich dadurch um $\frac{-p_\beta}{q_{\beta\alpha}} r_\alpha$ ändert. (2+4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 19. Mai, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.