Sommersemester 2022
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
4. Übung

1. Zu einem Polytop $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$ sei $P' := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid Ax \leq tb, 0 \leq t \leq 1\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass dann $P' = \mathrm{conv}((P \times \{1\}) \cup \{0\})$ gilt.
   (b) Beweisen Sie, dass für jede Fläche F von P die Menge $\mathrm{conv}((F \times \{1\}) \cup \{0\})$ eine Fläche von P' ist.
   (c) Gelten diese Aussagen auch noch zwingend, wenn P ein unbeschränktes Polyeder ist?
   (2+2+1 Punkte)

2. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$M_X = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \mid a_{i_0 j_0} \in X, \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0} = 1, \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = 1 \quad (\text{für } i_0, j_0 \in \{1,\dots,n\}) \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass eine $n \times n$-Matrix A genau dann in $M_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist, wenn sie eine Konvexkombination von Matrizen in $M_{\{0,1\}}$ ist. (4 Punkte)
   Hinweis: Induktion in n.

3. Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathrm{conv}(X)$. Zeigen Sie, dass es Vektoren $x_1, \dots, x_k \in X$ mit $k \leq n+1$ und $y \in \mathrm{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$ gibt. (4 Punkte)

4. Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Außerdem sei $P^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 1 \text{ für alle } x \in P\}$ und $P^0 := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 0 \text{ für alle } x \in P\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass P^* ein Polyeder ist.
   (b) Beweisen Sie, dass $(P^*)^* = P$ genau dann gilt, wenn $b \geq 0$.
   (c) Es sei außerdem $b = 0$. Zeigen Sie, dass dann $P^* = P^0$ gilt und dass P^0 der von den Zeilen von A erzeugte Kegel ist. (2+3+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 5. Mai, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.