Lineare und Ganzzahlige Optimierung
3. Übung

1. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Optimallösung der LPs $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. Außerdem sei $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m) \in \mathbb{R}^m$, und es sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $A\tilde{x} \leq \tilde{b}$. Beweisen Sie, dass $\tilde{x}$ eine Optimallösung der LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq \tilde{b}\}$ ist, falls für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_i^t \tilde{x} < \tilde{b}_i$ auch $a_i^t x^* < b_i$ gilt (wobei a_i^t die i-te Zeile von A sei). (5 Punkte)

2. Betrachten Sie das folgende primal-duale Paar von linearen Programmen: $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$. Nehmen Sie an, dass $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ein nichtleeres Polytop ist. Zeigen Sie, dass es eine dual zulässige Lösung y mit $y > 0$ und $A^t y > c$ gibt. (5 Punkte)

3. Es sei P ein Polyeder mit $\dim(P) = d$ und F eine Fläche von P mit $\dim(F) = k \in \{0, \dots, d-1\}$. Zeigen Sie, dass es Flächen $F_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_{d-1}$ von P gibt mit
   i) $F \subseteq F_{k+1} \subseteq F_{k+2} \subseteq \cdots \subseteq F_{d-1} \subseteq P$,
   ii) $\dim(F_{k+i}) = k + i$ für $i \in \{1, \dots, d-k-1\}$. (5 Punkte)

4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder sind, dann ist auch $X + Y$ ein Polyeder. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 28. April, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.