Lineare und Ganzzahlige Optimierung
2. Übung

1. Es (P) ein lineares Programm in der Form $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. Zeigen Sie, dass das duale LP des dualen LPs von (P) äquivalent zu (P) ist. (2 Punkte)

2. Entscheiden Sie mit Hilfe der Fourier-Motzkin-Elimination, ob die folgenden Ungleichungssysteme $A_i \leq b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) eine Lösung besitzen. Wenn ja, geben Sie eine solche an. Wenn nein, dann geben Sie ein y mit $y \geq 0$, $y^t A_i = 0$, und $y^t b_i < 0$ an.

   (a) $A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$. (2+2 Punkte)

3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+k)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b\}$$

   ein Polyeder ist. (4 Punkte)

4. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden linearen Programme:

   (P1) $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

   (P2) $\max\{\mathbb{1}_n^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

   (P3) $\max\{c^t x \mid Ax \leq \tilde{b}, x \geq 0\}$

   Welche der folgenden Aussagen sind dann notwendigerweise wahr? Beweisen Sie Ihre Antworten.

   (a) Wenn (P1) unbeschränkt ist, dann ist (P2) unbeschränkt.

   (b) Wenn (P2) unbeschränkt ist, dann ist (P1) unbeschränkt.

   (c) Wenn (P1) unbeschränkt ist, dann ist (P3) unzulässig oder unbeschränkt. (2+2+2 Punkte)

b.w.

5. Seien $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < a, Bx \leq b\}$$

genau dann nicht-leer ist, wenn für alle $y \in \mathbb{R}^{m_1}_{\geq 0}$ und $y \in \mathbb{R}^{m_2}_{\geq 0}$ die folgenden Aussagen gelten:

(i) Wenn $y^t A + z^t B = 0$, dann $y^t a + z^t b \geq 0$

(ii) wenn $y^t A + z^t B = 0$ und $y \neq 0$, dann $y^t a + z^t b > 0$. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 21. April, 2022, vor der Vorlesung im Hrsaal.

Veranstaltungshinweis der Gleichstellungs-AG:
We invite all female, intersexual, non-binary, trans* and agender bachelor and master students to the in-person event "Tea Time With Women in Mathematics", which will take place on April 29th from 4pm (s.t.) to 6pm in the Zeichensaal, Wegelerstr. 10. You will get the chance to talk to other participants about your experiences during your studies, your plans for the future, and everything else that comes to your mind, whilst enjoying a nice cup of tea and some cookies.