Sommersemester 2022 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner | Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
1. Übung

1. Eine Papierfabrik stellt Papierrollen von 3 m Breite her. Die Kunden bestellen allerdings Rollen kleinerer Breite, und die Fabrik muss die bestellten Rollen aus den 3 m breiten Rollen herausschneiden. Zum Beispiel kann eine 3 m breite Rolle in zwei 93 Zentimeter breite Rollen und eine 108 m breite Rolle geschnitten werden, wobei ein Rest von 6 cm bleiben würde. Die aktuell zu bearbeitende Gesamtbestellung bestehe aus:

   - 90 Rollen der Breite 130 cm,
   - 610 Rollen der Breite 108 cm,
   - 395 Rollen der Breite 42 cm und
   - 211 Rollen der Breite 93 cm.

   Stellen Sie ein lineares Programm auf, mit dem die Anzahl der zu produzierenden 3 m breiten Rollen minimiert und ein korrektes Zuschneiden der bestellten Rollen gewährleistet wird. (5 Punkte)

2. Es seien zwei endliche disjunkte Mengen A und B von Punkten in der Ebene gegeben. Wir suchen eine quadratische Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, so dass alle Punkte in A unter der Kurve $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$ und alle Punkte in B über diese Kurve liegen (insbesondere soll kein Punkt auf der Kurve liegen). Geben Sie ein lineares Programm an, mit dessen Lösung Sie direkt die Existenz eines solchen Polynoms überprüfen können und, falls es existiert, ein solches Polynom angeben können. (5 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass die Dimension eine nicht-leeren Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gleich der größten Zahl d ist, für die X Elemente $v_0, v_1, \ldots, v_d$ enthält, sodass $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0, \ldots, v_d - v_0$ linear unabhängig sind. (3 Punkte)

4. (a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{conv}(X)$ für jede Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ die kleinste konvexe Menge ist, die X enthält.

   (b) Zeigen sie, dass jede Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $|X| > n + 1$ in zwei Teilmengen X_1 und X_2 zerlegt werden kann, sodass $\operatorname{conv}(X_1) \cap \operatorname{conv}(X_2) \neq \emptyset$ gilt. (2+5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 14. April, 2022, vor der Vorlesung im Hrsaal.