Lemma von Farkas

Theorem (Lemma von Farkas, allgemeinster Fall)

Für $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$ hat genau eines der beiden folgenden System eine Lösung:

System 1:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array}$$

$By \leq a$

System 2:

$$\begin{array}{rcrcl} u^tA & + & v^tC & \geq & 0^t \\ u^tB & + & v^tD & = & 0^t \\ u & & & \geq & 0 \\ u^ta & + & v^tb & < & 0 \end{array}$$

$u^t B = 0$

$u \geq 0$

$u^t a < 0$

Starke Dualität

Theorem (Sarke Dualität)

Für zwei lineare Programme

$$\begin{array}{rrcl} & \max c^t x & & \qquad (P) \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rrcl} & \min b^t y & & \qquad (D) \\ \text{s.t.} & A^t y & = & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. (P) und (D) sind beide unzulässig.
2. (P) ist unbeschränkt und (D) ist unzulässig.
3. (P) ist unzulässig und (D) ist unbeschränkt.
4. (P) und (D) sind beide zulässig. Dann haben beide eine Optimallösung und für jede Optimallösung $\tilde{x}$ von (P) und jede Optimallösung $\tilde{y}$ von (D) gilt
$$c^t \tilde{x} = b^t \tilde{y}.$$

Beweis: Offenbar kann höchstens eine der Aussagen wahr sein.

Wenn eines der LPs unbeschränkt ist, dann ist das andere unzulässig (folgt aus schwacher Dualität)

Wir nehmen, das eines der LPs (o.B.d.A (P)) beschränkt und zulässig ist.

$\Longrightarrow$ $Ax \leq b$ ist ein zulässiges System.

Da (P) beschränkt ist, gibt es ein $B \in \mathbb{R}$,
sodass $Ax \leq b$ nicht zulässig ist.

$$-c^t x \leq -B$$

Farkas Lemma $\Longrightarrow$ $\exists\, u \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}$:

$u \geq 0$, $z \geq 0$, $u^t A - z c^t = 0^t$ und $b^t u - zB < 0$.

Falls $z = 0$, dann $u^t A = 0^t$, $b^t u < 0$, $u \geq 0$

also: $Ax \leq b$ ist unzulässig. $\lightning$

Also: $z > 0$

Definiere $\bar{u} = \frac{1}{z} u$

$\Longrightarrow A^t \tilde{u} = c$ und $\tilde{u} \geq 0$

$\Longrightarrow \tilde{u}$ ist zulässige Lösung von (D).

Und (D) ist wegen der schwachen Dualität beschränkt.

Bleibt zu zeigen: Es gibt eine Lösung x von (P) und y von (D) mit $c^t x \geq b^t y$

Annahme: Es gibt keine solchen Lösungen x und y.

$\Longrightarrow$ Das folgende System hat keine Lösung:

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
A^t y &= c \\
-c^t x + b^t y &\leq 0 \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Farkas: $\exists\, u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^n,\ w \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
u^t A - w c^t &= 0 \\
v^t A^t + w b^t &\geq 0 \\
u^t b + v^t c &< 0 \\
u &\geq 0, \quad w \geq 0
\end{aligned}
$$

Fall 1: $w = 0$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} Ax &\le b \\ A^t y &= 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ hat keine Lösung.}$$

Widerspruch, da (P) und (D) zulässig sind.

Fall 2: $w > 0$

$$\Longrightarrow \quad 0 > w\, u^t b + w\, v^t c \geq u^t(-Av) + v^t(A^t u) = 0$$

$\square$

Starke Dualität

Bemerkung: Aus der starken Dualität folgt: Das Finden einer **Optimallösung** des LPs (P) ist nur genauso schwer wie das Finden einer **zulässigen Lösung** der folgenden Ungleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.t.} & Ax & \leq & b \\ & A^t y & = & c \\ & c^t x & \geq & b^t y \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ein Algorithmus zum Finden einer zulässigen Lösung reicht aus.

(P) \ (D)	Zulässig beschränkt	Zulässig unbeschränkt	Unzulässig
Zulässig beschränkt	✓	✗	✗
Zulässig unbeschränkt	✗	✗	✓
Unzulässig	✗	✓	✓

✓ möglich

✗ unmöglich

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \le & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \ge & c \\ x & & & & & \ge & 0 \\ & & & & z & \le & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \ge & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \le & f \\ u & & & & & \ge & 0 \\ & & & & w & \le & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$= \min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Spezialfälle von primal-dualen Paaren:

- $\max\{c^t x : Ax \leq b\}$, $\min\{b^t y : y^t A = c^t, y \geq 0\}$
- $\max\{c^t x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, $\min\{b^t y : y^t A \geq c^t, y \geq 0\}$
- $\max\{c^t x : Ax \geq b, x \geq 0\}$, $\min\{b^t y : y^t A \geq c^t, y \leq 0\}$
- $\max\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$, $\min\{b^t y : y^t A \geq c\}$

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Dualisieren

	Primales LP	Duales LP
Variablen	$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_m$
Matrix	A	A^t
Rechte Seite	b	c
Zielfunktion	$\max c^t x$	$\min b^t y$
Nebenbedingungen	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualisieren

Bemerkung: Welche LP als primales und welche als duales angesehen wird, ist willkürlich. Dualisieren des dualen LPs ergibt wieder das primale LP.

Komplementärer Schlupf (Complementary slackness)

Theorem (Komplementärer Schlupf für Ungleichungen)

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearen Programmen. Dann sind für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y = c$ und $y \geq 0$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) x ist eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und y ist eine Optimallösung von $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$.

(b) $c^t x = b^t y$.

(c) $y^t(b - Ax) = 0$.

<u>Beweis</u>: (a) $\Leftrightarrow$ (b): starke Dualität.

$(b) \Longleftrightarrow (c)$: $y^t(b - Ax) = y^t b - y^t A x$

$$= y^t b - c^t x$$

Also: $y^t(b - Ax) = 0 \Longleftrightarrow y^t b = c^t x$ $\Leftarrow$

Theorem (Komplementärer Schlupf für Ungleichungen mit nicht-negativen Variablen)

Sei $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearen Programmen. Dann sind für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y \geq c$ und $y \geq 0$ die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(a) x ist eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und y eine Optimallösung von $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$.

(b) $c^t x = b^t y$.

(c) $y^t(b - Ax) = 0$ und $x^t(A^t y - c) = 0$.

Beweis: (a) $\Leftrightarrow$ (b): starke Dualität.

$(b) \Longleftrightarrow (c)$: $0 \leq y^t(b - Ax)$

$$0 \leq x^t(A^t y - c)$$

Also: $y^t(b-Ax) + x^t(A^t y - c)$

$$= y^t b - y^t A x + x^t A^t y - x^t c$$

$= y^t b - x^t c$ ist genau dann

0, wenn $y^t(b-Ax) = 0$ und $x^t(A^t y - c) = 0$

$\square$